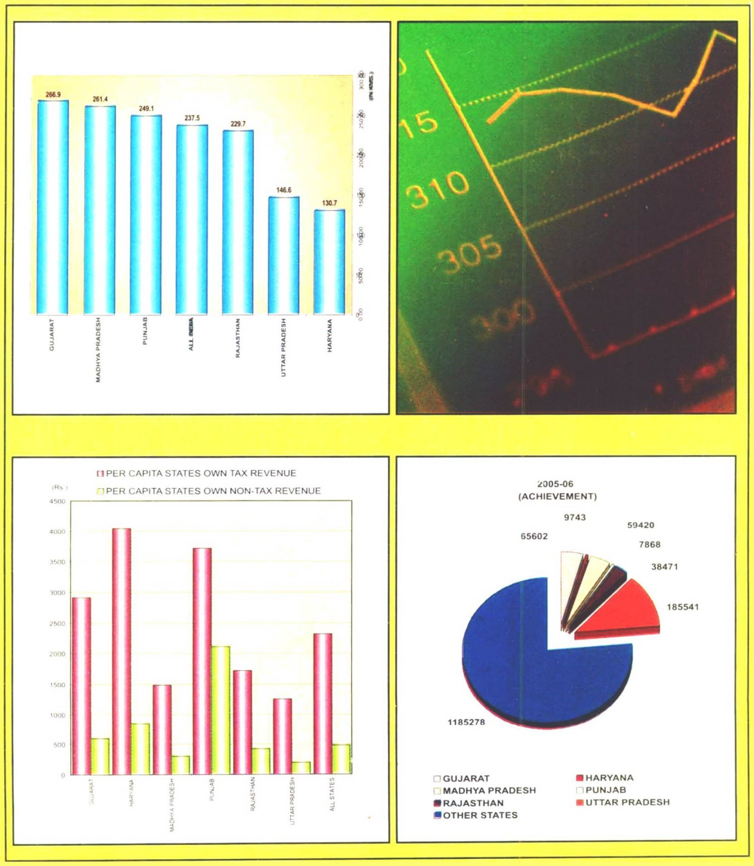
BC-02

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



व्यावसायिक सांख्यिकी

BC-02

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

व्यावसायिक सांख्यिकी

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच

कुलपति

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

संयोजक/सदस्य

संयोजक

प्रो.(डॉ.) एम. डी. अग्रवाल

से. नि. आचार्य,(वाणिज्य)

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य सचिव

प्रो.(डॉ.) अनाम जैतली

निदेशक(अकादमिक)

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो.(डॉ.) आर. के. दीक्षित**
   आचार्य एवं अध्यक्ष, ई. ए. एफ. एम. विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
2. **प्रो.(डॉ.) एस. जे. लालवानी**
   आचार्य, व्यावसायिक वित्त एवं अर्थशास्त्र
   वाणिज्य एवं प्रबन्ध संकाय
   जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर
3. **प्रो.(डॉ.) आई. वी. त्रिवेदी**
   आचार्य, बैंकिंग एण्ड बिजनेस इकॉनोमिक्स
   मोहन लाल सुखाड़िया विश्वविद्यालय, उदयपुर
4. **डॉ. एस. जी. शर्मा**
   सह-आचार्य एवं अध्यक्ष, ए. बी. एस. टी. विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय जयपुर
5. **डॉ. पुखराज दाधीच**
   राजकीय महाविद्यालय अजमेर

संपादन तथा पाठ लेखन

सम्पादक

प्रो.(डॉ.) एन.पी. अग्रवाल

आचार्य, ए.बी.एस.टी. विभाग

राजस्थान विश्वविद्यालय जयपुर

लेखक (इकाई सं.)

1. **डॉ. सुरक्षा शर्मा** (1,2)
   व्याख्याता, ए.बी.एस.टी. विभाग
   वैदिक कन्या महाविद्यालय, जयपुर
2. **प्रो. एन. एस. राव** (3,4,5,6)
   से.नि.आचार्य, बैंकिंग एण्ड बिजनेस इकॉनोमिक्स
   मोहन लाल सुखाडिया विश्वविद्यालय, उदयपुर
3. **डॉ. राजकुमार गोयल** (7, 8)
   व्याख्याता, ए.बी.एस.टी. विभाग
   अग्रवाल कॉलेज, जयपुर
4. **डॉ. सोनिया अग्रवाल** (9,10)
   व्याख्याता, ए.बी.एस.टी. विभाग
   कानोडिया महिला महाविद्यालय, जयपुर
5. **डॉ. सुप्रिया अग्रवाल** (11,12,13,14)
   व्याख्याता
   सुबोध प्रबन्ध संस्थान, जयपुर
6. **डॉ. एस. जी. शर्मा** (15,16,17)
   सह-आचार्य एवं अध्यक्ष, ए. बी. एस. टी. विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय जयपुर

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रो. नरेश दाधीच	**प्रो. एम. के. घडोलिया**	**योगेन्द्र गोयल**
कुलपति	निदेशक	प्रभारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा	संकाय विभाग	पाठ्य सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल

सहायक उत्पादन अधिकारी

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

पुनः उत्पादन - जून 2011 ISBN No. - 13/978-81-8496-186-7

इस सामग्री के किसी भी अंश को व. म. खु. वि. कोटा की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में अथवा मिमियोग्राफी (चक्रमुद्रण) द्वारा या अन्यत्र पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।
व. म. खु. वि. कोटा के लिए कुलसचिव व. म. खु. वि. कोटा(राज.) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

BC -02

व्यावसायिक सांख्यिकी

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा(राज.)

अनुक्रमणिका

इकाई व इकाई का नाम		**पृष्ठ संख्या**
इकाई 1.	सांख्यिकी : परिचय	7–21
इकाई 2.	समंक एवं समंकों का संग्रहण	22–33
इकाई 3.	एक चरीय समंकों का विश्लेषण - आवृति वितरण का अर्थ तथा आवृति वितरणों का सृजन	34–54
इकाई 4.	केन्द्रीय प्रवृत्ति एवं अपकिरण की अवधारणा तथा मापन	55–90
इकाई 5.	विषमता की अवधारणा एवं मापन	91–104
इकाई 6.	सरल सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन	105–133
इकाई 7.	सूचकांक	134–153
इकाई 8.	भारित सूचकांक	154–181
इकाई 9.	व्यावसायिक पूर्वानुमान	182–192
इकाई 10.	व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीकें	193–210
इकाई 11.	काल श्रेणी का अर्थ एवं परिभाषा	211–216
इकाई 12.	काल श्रेणी का विघटन एवं गणितीय निदर्श	217–220
इकाई 13.	प्रवृत्ति का मापन	221–232
इकाई 14.	मौसमी निर्देशांकों का मापन	233–245
इकाई 15.	प्रायिकता - सरल घटनाएं	246–256
इकाई 16.	प्रायिकता - संयुक्त घटनाएं	257–269
इकाई 17.	प्रायिकता बंटन	270–283

इकाई-1

सांख्यिकी : परिचय

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

1.1 प्रस्तावना

1.2 सांख्यिकी का उद्‌गम एवं विकास

1.3 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा

1.3.1 बहुवचन संज्ञा के रूप में परिभाषाएँ - समंकों का अर्थ एवं विशेषताएँ

1.3.2 एकवचन संज्ञा के रूप में परिभाषाएँ

1.4 सांख्यिकी का क्षेत्र

1.4.1 सांख्यिकी की विषय सामग्री - 1. सांख्यिकीय रीतियाँ
2. व्यवहारिक सांख्यिकी

1.4.2 सांख्यिकी की प्रकृति

1.4.3 सांख्यिकी के उद्देश्य

1.4.4 सांख्यिकी की सीमाएँ

1.5 सांख्यिकी का महत्व

1.6 सारांश

1.7 स्वपरख प्रश्न

1.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- सांख्यिकी का विस्तृत अर्थ समझ सके ।
- सांख्यिकी के क्षेत्र के अन्तर्गत सांख्यिकीय रीतियों, सांख्यिकी की प्रकृति उद्देश्य एवं सीमाओं को समझा सकें ।
- सांख्यिकी का विभिन्न क्षेत्रों में महत्व बतला सके ।

1.1 प्रस्तावना

आज के युग को "सांख्यिकी का युग" कहा जाने लगा है । आधुनिक युग में ज्ञान विज्ञान की प्रत्येक शाखा प्रत्यक्ष और अप्रत्यक्ष रूप से संख्यात्मक तथ्यों से संबंधित होती है । संख्याओं के बिना तथ्य की सत्यता अधूरी रहती है और संख्याओं के बिना न ही कुछ प्रमाणित किया जा सकता है न ही निर्णय लिए जा सकते हैं और न ही विश्वास किया जा सकता है । जो ज्ञान संख्यात्मक तथ्यों पर आधारित नहीं होता, वह वास्तव में 'ज्ञान' ही नहीं कहा जा सकता । इस संदर्भ में ब्रिटिश विद्‌वान **लार्ड केल्विन** ने लिखा है “जिस विषय की आप बात कर रहे हैं यदि आप उसका माप कर सकते हैं और उसे संख्याओं के रूप में प्रकट कर सकते हैं तो आप उसके

बारे में कुछ जानते है किन्तु जब आप उस विषय का माप नहीं कर सकते, उसे संख्याओं में प्रकट नहीं कर सकते तो आपका ज्ञान अल्प है और असंतोषजनक प्रकृति का है । यह 'ज्ञान' का समारम्भ हो सकता है परन्तु (संख्यात्मक रूप के अभाव मे) आप अपनी विचारधारा में एक 'विज्ञान' के स्तर तक प्रगति नहीं कर पाये हैं ।" यही कारण है कि जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में संख्यात्मक तथ्यों का बहु त प्रयोग किया जाता है ।

1.2 सांख्यिकी का उद्गम एवं विकास

अंग्रेजी भाषा के शब्द 'स्टैटिस्टिक्स' (Statistics) की उत्पत्ति शब्दकोष के अनुसार इटली भाषा के शब्द 'स्टैटिस्टा' (Statista), जर्मनी भाषा के शब्द स्टैटिस्टिक (Statistick) एवं लेटिन भाषा के शब्द 'स्टेटस' (Status) से हुई है । इन तीनों शब्दों का अर्थ राज्य (State) है । ऐसा माना जाता है कि प्राचीनकाल में देश की सुरक्षा एवं वित्तीय आवश्यकताओं के लिए जनसंख्या तथा राज्य की आर्थिक स्थिति से संबंधित आकड़ों का संकलन किया जाता था । इन आकड़ों के संकलन का एकमात्र उद्देश्य राज्य प्रशासन को सुव्यवस्थित रूप से चलाना मात्र था । अत: सांख्यिकी की उत्पत्ति **राजाओं के विज्ञान** (Science of Kings) के रूप में हुई ।

सांख्यिकी को मानवीय ज्ञान की एक पृथक शाखा के रूप में सर्वप्रथम मान्यता प्रदान करने का श्रेय जर्मनी के न्याय एवं राजनीति विज्ञान के प्रोफेसर गॉट फाइड एकेनवॉल को जाता है जिन्होंने सर्वप्रथम 1949 में स्टैटिस्टिक्स को पृथक विषय के रूप में स्वीकार किया । इसी कारण इन्हें 'सांख्यिकी का जनक' (Father Of Statistics) भी कहा जाता है ।

1.3 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा

सांख्यिकी शब्द "स्टैटिस्टिक्स" का हिन्दी अनुवाद है । फादर कामिल बुल्के ने अंग्रेजी-हिन्दी कोष में स्टैटिस्टिक्स शब्द के दो अर्थ दिये है प्रथम बहु वचन संज्ञा के रूप में व द्वितीय एकवचन संज्ञा के रूप में । बहु वचन में सांख्यिकी का तात्पर्य समंको या आकड़ों (Statistical data) से होता है जो किसी क्षेत्र से संबंधित संख्यात्मक विवरण होते है जैसे जनसंख्या के समक, राष्ट्रीय आय के समक, मूल्य स्तर के समंक, अपराध संबंधी आकड़े आदि । एकवचन में सांख्यिकी का अर्थ सांख्यिकी-विज्ञान है जिसमें समको के संग्रहण, विश्लेषण और निर्वचन से संबंधित क्रियाओं अर्थात सांख्यिकीय विधियों का अध्ययन किया जाता है । कैन्डाल तथा बकलैण्ड ने सांख्यिकी शब्द की व्याख्या निम्न प्रकार की है-

बहु वचन रूप में :- व्यक्तिगत इकाइयो के समहू से -संबंधित संख्यात्मक तथ्य ।

एकवचन रूप में :- समंकों के संग्रहण, विश्लेषण -व निर्वचन का विज्ञान ।

बहु वचन तथा एकवचन संज्ञा के रूप में विभिन्न विदवानों ने सांख्यिकी को निम्नानुसार परिभाषित किया है:-

बहु वचन संज्ञा के रूप में दी गई परिभाषाएँ

(समंकों की परिभाषाएँ)

आम लोग सांख्यिकी का अर्थ आकड़ों से लगाते हैं । उनकी दृष्टि में समंको और आकड़ों में कोई अन्तर नहीं है । किन्तु यह विचार भ्रम पूर्ण है । सभी आकड़े समक नहीं होते । केवल

वही आकड़े जो कुछ विशेष गुण रखते हों, समंक कहलाते हैं । समंको के रूप में सांख्यिकी की कुछ प्रमुख परिभाषायें निम्न प्रकार से हैं-

"समंक किसी अनुसंधान के किसी विभाग में तथ्यों का संख्या के रूप में प्रकटीकरण है, जिन्हें एक-दूसरे से संबंधित रूप में प्रस्तुत किया जाता है ।"

- डा.ए.एल. बाउले

"समंक किसी राज्य के निवासियों की स्थिति से संबंधित वर्गीकृत तथ्य है विशेष रूप से वे तथ्य, जिन्हें संख्याओं में, संख्याओं की तालिका में या किसी सारणीकृत या वर्गीकृत व्यवस्था में प्रस्तुत किया जा सके ।"

-वेब्स्टर

"समंक तथ्यों के परिभाषात्मक पहलुओं के संख्यात्मक विवरण हैं जो मदों की गिनती या माप के रूप में व्यक्त होते हैं ।''

-वालिस एवं राबर्टस

"समंक किसी प्राकृतिक या सामाजिक घटना के माप, गणना या अनुमान है जिन्हे व्यवस्थित रूप से विन्यसित कर उनमें पारस्परिक संबंध प्रदर्शित किया जाता है ।"

-कॉनर

उपरोक्त परिभाषाएँ समंक शब्द की पूर्ण व्याख्या नहीं करती हैं। ये परिभाषाएँ आधुनिक दृष्टिकोण से बहुत संकुचित हैं। उपर्युक्त परिभाषाओं में अनेक दोष हैं। प्रथम, उपर्युक्त परिभाषाओं में कुछ परिभाषाएँ ऐसी हैं जिनमें केवल समंक शब्द को परिभाषित करने का प्रयत्न किया गया है, उसका वास्त्विक अभिप्राय स्पष्ट नहीं किया जा सका है । द्वितीय वेब्स्टर की परिभाषा के अनुसार समको को, राज्य की परिधि में रहने वाले व्यक्तियों तक ही सीमित कर दिया गया जो कि अत्यन्त आवश्यक है ।

बहुवचन के रूप में दी गयी सर्वश्रेष्ठ परिभाषा

समंकों की आदर्श परिभाषा प्रो. होरेस सिक्राइस्ट द्वारा दी गयी है जिसमें उपर्युक्त सभी दोषों का निवारण भी हो जाता है ।

"समको से हमारा अभिप्राय तथ्यों के उन समूहों से है जो अनेक कारणों से, पर्याप्त सीमा तक प्रभावित होते हैं. जो संख्यात्मक रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं, यथोचित शुद्धता के अनुसार जिनका आगणन अथवा अनुमान लगाया जाता है, जिन्हें किसी पूर्व-निश्चित उद्देश्य के लिए एक सुव्यवस्थित रीति द्वारा एकत्रित किया जाता है, जिन्हें किसी पूर्व-निश्चित उद्देश्य के लिए एक सुव्यवस्थित रीति द्वारा एकत्रित किया जाता है तथा जिन्हें तुलना के लिए एक-दूसरे से संबंधित रखा जा सकता है ।" -होरेस सिक्राइस्ट

यह परिभाषा समंकों का विश्लेषणात्मक वर्णन करती है तथा इसमें वे सभी विशेषताएँ विद्यमान हैं जो समंकों में होनी चाहिए । सांख्यिकी शास्त्र में होरेस सेक्राइस्ट की परिभाषा विशेष महत्व की मानी जाती है । इसी परिभाषा के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि ' 'सभी सांख्यिकीय समंक तथ्य होते हैं लेकिन सभी संख्यात्मक तथ्य समंक नहीं होते हैं ।"

चूँकि होरेस सिक्राइस्ट की परिभाषा अपने आप में सर्वश्रेष्ठ एवं एक आदर्श परिभाषा है अत: आगे हम इसी परिभाषा पर आधारित समंकों की विशेषताओं का अध्ययन करेंगे ।

समंको की विशेषताएँ-समको की विशेषताएँ निम्न प्रकार से हैं-

1. तथ्यों के समूह :- समंक तथ्यों के समूह के रूप में होते हैं । एक अकेली सूचना समंक नहीं हो सकती क्योंकि उससे किसी प्रकार का कोई उचित निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है । जैसे एक व्यक्ति की आय, यह समंक नहीं है जब तक कि विभिन्न परिवारों की आय नहीं दी हुई हो । विभिन्न परिवारों की आय का उल्लेख तथ्यों का समूह है । यह समंक है । सांख्यिकी के दृष्टिकोण से किसी एक व्यक्ति से संबंधित अध्ययन का कोई महत्व नहीं होता है । तथ्य किसी समूह से संबंधित होने चाहिए ताकि उससे कोई निष्कर्ष निकाला जा सके ।

2. संख्याओं के रूप में व्यक्त :- समंक संख्याओं के रूप में व्यक्त होने चाहिए । कोई तथ्य तभी समंक कहे जा सकते हैं जब संख्याओं के रूप में प्रस्तुत किये जाए । गुणात्मक तथ्य जैसे बुद्धिमानी स्वस्थ, सुन्दरता, धनवान, निर्धन अथवा ईमानदारी को तब तक समंक नहीं कहा जा सकता जब तक इनका माप संख्यात्मक रूप में न हों, उदाहरण के रूप में, यदि यह कहा जाये कि मोहन धनी व्यक्ति है व सोहन निर्धन व्यक्ति है तो ऐसे तथ्यों को साख्यिकी में समंक नहीं कहेंगे । लेकिन इन्हें इस प्रकार व्यक्त करें कि मोहन और सोहन की वार्षिक आय क्रमश: 20000 रूपये और 2000 रूपये है तो ऐसी सूचना समंक कहलायेगी ।

3. पर्याप्त सीमा तक अनेक कारणों से प्रभावित :- समंक स्वयं उत्पन्न नहीं होते बल्कि किसी एक सीमा तक वे विभिन्न कारणों से प्रभावित होते हैं । उदाहरणार्थ किसी कक्षा के विद्यार्थियों का परीक्षा परिणाम श्रेष्ठ या खराब रहना केवल एक कारण का ही प्रभाव नहीं होता बल्कि अनेक कारणों यथा विद्यार्थियों_की तैयारी, प्रश्न पत्रों का स्तर, पाठ्य पुस्तकों की उपलब्धि, भाषा पर अधिकार तथा परीक्षक का दृष्टिकोण आदि पर निर्भर करता है । जिनमें से सभी अथवा किसी एक प्रमुख कारण और प्रभाव के संबंध का अध्ययन सांख्यिकी के अन्तर्गत किया जाता है ।

4. गणना अथवा अनुमान द्वारा संकलन - समंको का संकलन या तो संगणना रीति द्वारा या अनुमान द्वारा किया जाता है । संगणना या अनुमान में से किस को चुना जाये, यह अनुसंधान कार्य के क्षेत्र व उसके उद्देश्य पर निर्भर करता है यदि अनुसंधान का क्षेत्र सीमित है तथा शुद्धता की अधिक आवश्यकता है तो संगणना विधि ही अधिक उपयुक्त होगी । विपरीत परिस्थिति होने पर अनुमान विधि का प्रयोग उपयुक्त रहता है । उदाहरणार्थ किसी कक्षा के विद्यार्थियों की गणना की जा सकती है लेकिन किसी मेले में उपस्थित व्यक्तियों की संख्या की गणना अनुमान द्वारा ही संभव है । **डॉ. बाउले** ने ठीक ही कहा है कि “बडे अंकों को इकाई तक ठीक से नहीं गिना जाता, उनका अनुमान 'किया जाता है ।“

5. यथोचित परिशुद्धता - समंको का संकलन करते समय शुद्धता का यथोचित स्तर बनाए रखना आवश्यक है । परन्तु प्रश्न यह उठता है कि शुद्धता के उचित स्तर से क्या आशय है ? या शुद्धता का मूल्यांकन कैसे हो? इस प्रश्न के उत्तर में यही कहा जा सकता है कि शुद्धता का स्तर जांच के उद्देश्य, उसकी प्रकृति, आकार एवं उपलब्ध साधनों पर निर्भर करता है अर्थात शुद्धता एक

सापेक्षिक शब्द है, निरपेक्ष नहीं । उदाहरणार्थ सोने को तौलते समय हम मिलीग्राम की परिशुद्धता का ध्यान रखते हैं परन्तु सब्जी की तौल करते समय 5-10 ग्राम तक के तौल पर ध्यान नहीं दिया जाता है । समस्याओं का अध्ययन, गणना एवं अनुमान के आधार पर किया जाता है किन्तु इस क्रिया में शत प्रतिशत शुद्धता न संभव है और न आवश्यक ही, क्योंकि सांख्यिकी में हम औसत समस्याओं का अध्ययन करते हैं न कि व्यक्तिगत । अतः. शुद्धता का उचित स्तर बनाये रखना आवश्यक है ।

6. पूर्व निर्धारित उद्देश्य - समंकों का संग्रह किसी पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए किया जाना चाहिए । समंक संग्रहण के उद्देश्य को पूर्व निश्चित करने से उनमें पूर्णता व शुद्धता बढती है । इसके निरर्थक अंकों का संकलन नहीं होता है तथा आवश्यक समंक संग्रहण से छूटते भी नहीं है । उदाहरण के लिए यदि किसी उद्योग में काम कर रहे श्रमिकों की मजदूरी के आकड़े संग्रहित करने का क्या उद्देश्य है । प्रथम जीवन स्तर का अनुमान लगाना या द्वितीय अन्य उद्योग से तुलना करना या तृतीय मजदूरी वृद्धि की मांग पर विचार करना ।

7. व्यवस्थित रूप से संकलन - समंकों का संकलन एक पूर्व निश्चित योजना के अनुसार सुव्यवस्थित तरीके द्वारा किया जाना चाहिए । अव्यवस्थित रूप से एकत्रित किये गये समंकों से समुचित एवं शुद्ध निष्कर्ष नहीं निकाले जा सकते ।व्यवस्थित रूप से संकलन से आशय, (1) समंक संग्रहण का उद्देश्य क्या है? (2) किस प्रकार समंक एकत्रित किए जायेंगे? तथा (3) समंक संग्रहण में किन-किन विधियों का प्रयोग किया जायेगा, से है ।

8. समंक परस्पर संबंधित होने चाहिए - समंक सदैव एक दूसरे से संबंधित होने चाहिए ताकि उनकी तुलना संभव हो सके । दूसरे शब्दों में, समको में सजातीयता तथा एकरूपता का गुण होना आवश्यक है । यदि विजातीय समंको को लिया जाये तो उनकी तुलना करना या उनसे कोई निष्कर्ष निकालना कठिन ही नहीं वरन् असम्मव होता है । उदाहरणार्थ व्यक्तियों की आयु तथा पेड़ों की ऊँचाई अथवा छात्रों की संख्या तथा सड़कों की लम्बाई, आदि तुलना योग्य तथ्य नहीं है और इसलिए इन्हें समंक नहीं कहा जा सकता है ।

समंकों की उपरोक्त विशेषताओं से स्पष्ट है कि समंकों में सजातीयता तुलनीयता, सामूहिक तथ्य तथा संख्यात्मक रूप में प्रस्तुतीकरण आदि गुण विद्यमान होने चाहिए । यदि इनमें से किसी भी एक गुण के अभाव में कोई तथ्य या आकड़ा समंक नहीं कहलायेगा अर्थात् ' 'सभी सांख्यिकीय समंक संख्यात्मक तथ्य होते हैं किन्तु सभी संख्यात्मक तथ्य समंक नहीं होते हैं ।''

एकवचन संज्ञा के रूप में दी गई परिभाषाएँ

एकवचन के रूप में 'सांख्यिकी' से अभिप्राय '**सांख्यिकी विज्ञान'** से लगाया जाता है । जिसमें समंकों के संकलन, विश्लेषण एवं निर्वचन से सम्बन्धित विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों का अध्ययन किया जाता है । सांख्यिकी-विज्ञान के रूप में दी जाने वाली परिभाषाओं को हम मुख्यत: निम्न दो भागों में बाँट सकते हैं -

1. **प्रतिष्ठित विचारकों द्वारा दी गई परिभाषाएँ - संकीर्ण विचारधारा ।**
2. **आधुनिक विचारकों द्वारा दी गई परिभाषाएँ - विस्तृत विचारधारा ।**

प्रतिष्ठित परिभाषाएँ :

प्रतिष्ठित या प्राचीन मत की परिभाषाओं में सांख्यिकीय विज्ञान को अत्यन्त संकुचित व सीमित रूप में स्वीकार किया गया है तथा वर्तमान कार्यक्षेत्र को उनमें पूर्ण रूप से समावेशित नहीं किया गया है । अब हम इस मत के विचारकों की कुछ परिभाषाओं का अध्ययन करेंगे :-

" सांख्यिकी ऐसा विज्ञान है जो हमें यह बताता है कि ज्ञात संसार के समस्त आधुनिक राज्यों की राजनीतिक व्यवस्था क्या है?"

- **वायलफेल्ड**

"सांख्यिकी अनुमान एवं सम्भावनाओं का विज्ञान है ।"

- बॉडिंगटन

1. "सांख्यिकी, सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर, सभी स्वरूपों में उसका माप करने का विज्ञान है । "
2. "सांख्यिकी गणना का विज्ञान है । "
3. "सांख्यिकी को उचित रूप से औसतों का विज्ञान कहा जा सकता है । "

- प्रोफेसर बाउले

उपरोक्त विचारकों की परिभाषाओं में सांख्यिकी को केवल राज्य विज्ञान के रूप में या मानवीय क्रियाओं तक ही सीमित का किया गया है । सांख्यिकीय रीतियों पर बहुत कम बल दिया है । कुल मिलाकर कहा जा सकता है कि सांख्यिकी के क्षेत्र को अत्यन्त संकुचित कर दिया गया है ।

आधुनिक परिभाषाएँ :

आधुनिक मत के अन्तर्गत वे परिभाषाएँ सम्मिलित की जाती है जिनमें सांख्यिकी विज्ञान को एक विस्तृत एवं व्यापक रूप में स्वीकार किया गया है । ऐसी कुछ परिभाषाओं का हम नीचे अध्ययन करेंगे -

"गणना या अनुमानों के संग्रहण के विश्लेषण द्वारा प्राप्त परिणामों से सामूहिक, प्राकृतिक अथवा सामाजिक घटनाओं पर, निर्णय करने की रीति को सांख्यिकी विज्ञान कहते है ।"

- डबल्यू. आई. किंग

"सांख्यिकी को संख्यात्मक तथ्यों के संग्रहण, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन से सम्बन्धित विज्ञान कहा जा सकता है ।"

- क्रॉकस्टन एवं काउडेन

उपरोक्त सभी परिभाषाएँ सांख्यिकी की विधियों को सम्मिलित करती हैं लेकिन सांख्यिकी की प्रकृति पर प्रकाश नहीं डालती यदि इनमें सांख्यिकी की प्रकृति अर्थात् कला तथा विज्ञान दोनों को सम्मिलित कर लिया जाये तो एक सर्वमान्य व उपयुक्त परिभाषा दी जा सकती है ।

सांख्यिकी की उपयुक्त एवं सर्वमान्य परिभाषा

उपर्युक्त वर्णित समस्त परिभाषाओं के अध्ययन से स्पष्ट होता है कि सांख्यिकी की परिभाषा के सम्बन्ध में विभिन्न विद्वानों में बहुत मतभेद है । वास्तव में सांख्यिकी की उपयुक्त

एवं आदर्श परिभाषा देना सरल कार्य नहीं है फिर भी निर्विवाद रूप से कहा जा सकता है कि सांख्यिकी के निम्न मूल तत्व हैं जिनका समावेश उसकी आदर्श परिभाषा में अवश्य होना चाहिए -

1. **सांख्यिकी की प्रकृति** - अर्थात् सांख्यिकी विज्ञान है अथवा कला या दोनों ।
2. **विषय सामग्री** - सांख्यिकी ऐसे सामूहिक तथ्यों से सम्बन्धित है जिनको संख्या के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा जिन पर अनेक कारणों का प्रभाव पड़ता है ।
3. **उद्देश्य -** उद्देश्य स्पष्ट एवं निश्चित होना चाहिए ।
4. **रीतियाँ -** सांख्यिकी की अनेक रीतियाँ है जिन्हें मुख्य रूप से चार श्रेणियों में बाँटा जा सकता है - अर्थात् संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन ।
5. **क्षेत्र** - सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यन्त व्यापक है ।

उक्त तत्वों के आधार पर सांख्यिकी को निम्नानुसार परिभाषित किया जा सकता है-

"सांख्यिकी विज्ञान एवं कला दोनों है जो सामाजिक, आर्थिक तथा प्राकृतिक समस्याओं के अध्ययन एवं समाधान के उद्देश्य से समंकों का संग्रहण वर्गीकरण, सारणीयन, प्रदर्शन, विश्लेषण एवं निर्वाचन करती है और इनसे सम्बन्धित वैज्ञानिक रीतियों के प्रयोग से अन्य भौतिक एवं सामाजिक विज्ञानों को समझने में मदद करती है ताकि निर्धारित उद्देश्य की पूर्ति हो सके ।"

1.4 सांख्यिकी का क्षेत्र

आधुनिक युग में विज्ञान का क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत हो गया है । यह कहना अनुचित न होगा कि "सांख्यिकी के बिना विज्ञान फलदायक नहीं होते और विज्ञानों के बिना सांख्यिकी निराधार और निर्मूल है ।" इसके क्षेत्र के बारे में जानने के लिए हमें निम्नलिखित बातों के बारे में जानकारी अवश्य प्राप्त करनी होगी:-

1.4.1 सांख्यिकी की विषय सामग्री:- सांख्यिकी की विषय सामग्री का अध्ययन हम निम्न दो भागों में बांट कर करेंगे -

(1) **सांख्यिकीय रीतियाँ** :- सांख्यिकीय रीतियों के माध्यम से किसी भी समस्या से सम्बन्धित समंक संकलित करने, उनको उचित रूप में प्रस्तुत करने, उनका विश्लेषण एवं निर्वचन करने, तत्पश्चात् उससे उचित परिणाम निकालने मे सहायता मिलती है । जॉनसन एवं जैकसन ने सांख्यिकीय रीतियों का आशय स्पष्ट करते हुए लिखा है कि "सांख्यिकीय रीतियाँ वे प्रक्रियाएँ है जिनका प्रयोग अंको के संग्रहण, संगठन, संक्षिप्तीकरण, विश्लेषण, निर्वचन एवं प्रस्तुतीकरण में किया जाता है ।"

कुल महत्वपूर्ण सांख्यिकीय रीतियाँ निम्नालिखित है :-

(i) समंको का संकलन - समंको को पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए एक निश्चित योजनानुसार प्राथमिक या द्वितीयक स्त्रोतो से एकत्रित करना संकलन कहलाता है । यदि अनुसंधान का उद्देश्य पूर्व-निश्चित है तो समंको का संकलन नियमित एवं एकरूप होता है तथा अनावश्यक सामग्री का संकलन नहीं हो पाता । समक गणना, प्रत्यक्ष माप, अप्रत्यक्ष माप अथवा अनुमान द्वारा एकत्रित किये जाते हैं । कुछ परिस्थितियाँ ऐसी होती हैं जहाँ अनुमान ही एकमात्र विकल्प होता है जैसे-देश

के धातु भण्डार, जल शक्ति भण्डार आदि । अनुसंधान का क्षेत्र सीमित होने तथा शुद्धता की अधिक आवश्यकता होने पर संकलन गणना द्वारा किया जा सकता है ।

इसके अलावा संकलन में शुद्धता का यथोचित स्तर रखा जाना चाहिए । पूर्ण या गणितीय शुद्धता, सामाजिक एवं मानवीय विज्ञानों में न तो सम्भव ही है और न आवश्यक ही । इसलिए विभिन्न उद्देश्यों के लिए ऑकड़े एकत्रित करते समय शुद्धता का स्तर भिन्न-भिन्न हो सकता हैं ।

(ii) प्रस्तुतीकरण - प्राय: प्रकाशित स्त्रोतों से संग्रहित समक व्यवस्थित रूप से मिल जाते हैं जबकि सर्वेक्षण द्वारा एकत्रित समंको को उचित ढंग से व्यवस्थित करने की आवश्यकता होती हैं । समंको का प्रस्तुतीकरण दो प्रकार से हो सकता है । प्रथम सारणी के रूप में, द्वितीय चित्र एवं रेखाचित्रों के रूप में । अत: समंक समूह को व्यवस्थित करने के लिए समको का सम्पादन, वर्गीकरण तथा सारणीयन करना अत्यन्त जरूरी है । एकत्रित समको को प्रयोग में लाने से पूर्व उनका सम्पादन अत्यधिक सावधानी से करना चाहिए जिससे भूलें, असंगतियाँ, अनावश्यक उत्तर, गणना सम्बन्धी त्रुटियों को सरलता से दूर किया जा सके । सम्पादन के पश्चात् तथा उनमें उत्पन्न विभ्रमों को दूर करने के पश्चात् वर्गीकरण करना इसलिए आवश्यक हो जाता है कि समंक की प्रमुख विशेषताएँ स्पष्ट हो जाएँ तथा सजातीयता और विजातीयता के आधार पर उनको वर्गीकृत किया जा सके । समंको के प्रस्तुतीकरण की अन्तिम प्रक्रिया सारणीयन हैं । इसके अन्तर्गत वर्गीकृत समंको को पंक्ति एवं स्तम्भ (कॉलम) में इस प्रकार संजोया जाता है जिससे उनके महत्व को सरलता से एवं एक ही दृष्टि से समझा जा सके तथा उनका तुलनात्मक अध्ययन किया जा सके । एकत्रित समंको को सुव्यवस्थित ढंग से संजोने से प्रस्तुतीकरण सरल हो जाता हैं । सारणीबद्ध समंको को केवल देखने मात्र से ही समस्या का प्रारिम्भक ज्ञान तो हो जाता है लेकिन प्रभावशाली ढंग से आकर्षित करने तथा मस्तिष्क पर अमिट प्रभाव डालने के लिए समंको को चित्रों तथा रेखाचित्रों द्वारा प्रस्तुत करना और भी लाभदायक होता है ।

(iii) विश्लेषण - वर्गीकृत समंको के विश्लेषण हेतु विभिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है जिनमें माध्य, अपकिरण विषमता, सहसम्बन्ध, सूचकांक, अन्तर्गणन आदि सम्मिलित है किसी समस्या में विश्लेषण की किस प्रविधि का प्रयोग किया जाए यह समंको की प्रकृति एवं अनुसंधान के उद्देश्यों पर निर्भर करता है । उदाहरण के तौर पर विद्यार्थियों के बौद्धिक स्तर का अध्ययन करने के लिये मध्य का प्रयोग किया जाता है, जबकि उनकी ऊँचाई अथवा उनके फैशन के सम्बन्ध में अध्ययन करने के लिए बहुलक का प्रयोग किया जाता है ।

(iv) निर्वचन - उपर्युक्त विश्लेषणात्मक रीतियों का प्रयोग करने के बाद उपलब्ध सांख्यिकीय मापों के आधार पर उचित, निष्पक्ष व बुद्धिमत्ता पूर्ण निर्णय लिये जाते हैं और उन निर्णयों की सांख्यिकीय जाँच की जाती है । वास्तव में विभिन्न सांख्यिकीय विधियों की सहायता से विवेक पूर्ण निष्कर्ष निकालना और निर्णय लेना आधुनिक सांख्यिकी का महत्वपूर्ण लक्ष्य है ।

(v) पूर्वानुमान - पूर्वानुमान भी एक सांख्यिकी रीति है जिसके अन्तर्गत भूत और वर्तमान के विश्लेषण से भविष्य के बारे में पूर्व घोषणा की जा सकती है । इस रीति के महत्वपूर्ण होने के कारण ही वर्तमान में पूर्वानुमान को अत्यधिक महत्व दिया जाता है ।

सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग पूर्ण तथा अपूर्ण दोनों प्रकार के विज्ञानों में किया जाता है। यद्यपि पूर्ण विज्ञानों में प्रयोगात्मक विधि का सर्वोपरि महत्व है, फिर भी भौतिकी, रसायनशास्त्र

आदि में विभिन्न परिणामों का विश्लेषण करने के लिए सांख्यिकीय विधियों का उपयोग आवश्यक हो जाता है । अपूर्ण विज्ञानों, जैसे समाज शास्त्र, अर्थशास्त्र आदि में तो सांख्यिकीय रीतियाँ अनुसन्धान और विश्लेषण के प्रमुख साधन के रूप में प्रयोग की जाती है!

(2) **व्यवहारिक सांख्यिकी** - व्यवहारिक सांख्यिकी, सांख्यिकीय रीतियों के व्यावहारिक अथवा क्रियात्मक पक्ष से सम्बन्धित है । सांख्यिकीय रीतियाँ विभिन्न क्रियाओं तथा सिद्धान्तों का निरूपण करती हैं, जबकि उन सिद्धान्तों को व्यावहारिक क्षेत्र में प्रयोग करने मे व्यावहारिक सांख्यिकी का उपयोग किया जाता है उदाहरणार्थ जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, मूल्य, मजदूरी, औद्योगिक उत्पादन आदि के आकड़े व्यवहारिक समक है । व्यवहारिक सांख्यिकी को निम्न भागो में बाँटा जा सकता है

(i) वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी- इसके अन्तर्गत किसी क्षेत्र के भूतकाल एवं वर्तमान काल में संकलित समंको का अध्ययन किया जाता है तथा इनका उद्देश्य विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है । जैसे व्यापारिक समंक, मूल्य सूचकांक, जनसंख्या समंक आदि ।

(ii) वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी - नये सिद्धान्त के प्रतिपादन के उद्देश्य से समंको का संकलन, विश्लेषण एवं निर्वचन सांख्यिकी के इस विभाग का क्षेत्र है । इस प्रकार वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी के अन्तर्गत यह अध्ययन किया जाता है कि सांख्यिकीय विधियों का ज्ञानविज्ञान की विभिन्न शाखाओं में किस प्रकार उपयोग किया जाता है ।

(iii) व्यावसायिक व्यावहारिक सांख्यिकी - व्यावसायिक सांख्यिकी का क्षेत्र काफी विस्तृत है । इसके अन्तर्गत न केवल व्यावसायिक समंको का संकलन करने तथा उन्हें सारणियों, रेखाचित्रों या चित्रों द्वारा प्रस्तुत करने की विधियों का समावेश होता है बल्कि ऐसी प्रक्रियाओं का भी उपयोग होता है जो मानव व मशीन की कुशलता तथा उत्पादन, विपणन एवं विज्ञापन आदि की नयी रीतियों का मूल्यांकन करके उपयुक्त रीतियों के सम्बन्ध मे निर्णय लेने में सहायक हो ।

(1.4.2) सांख्यिकी की प्रकृति - सांख्यिकी एक विज्ञान है अथवा कला या दोनों ही? इसके लिए यह जानना आवश्यक है कि विज्ञान अथवा कला का क्या अर्थ है ? विज्ञान का अर्थ विशेष ज्ञान से है जबकि कला किसी कार्य को करने का सर्वोत्तम ढंग है । एक अच्छे कैमरे का आविष्कार यदि विज्ञान है तो कलात्मक चित्र खींचना कला है । वास्तव में न तो बिना अच्छे कैमरे के अच्छा फोटोग्राफर कुछ कर सकता है और न ही बिना अच्छे फोटोग्राफर के अच्छे कैमरे की कोई उपयोगिता है इस प्रकार हम कह सकते हैं कि विज्ञान व कला अच्छे परिणामों के लिए एक दूसरे के पूरक हैं ।

विज्ञान में निम्नलिखित लक्षण होते हैं :-

(1) क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित ज्ञान

(2) कारण और प्रभाव के सम्बन्ध का अध्ययन

(3) सर्वमान्य व व्यापक नियम तथा गतिशीतला तथा

(4) तथ्यों का निष्पक्ष दृष्टि से यथार्थ रूप मे प्रस्तुतीकरण

विज्ञान के रूप में सांख्यिकी में सभी चारों गुण विद्यमान है । सांख्यिकी के अध्ययन की प्रणाली क्रमबद्ध व सुव्यवस्थित है । इसमें कारण और प्रभाव के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है । सांख्यिकी के नियम सर्वमान्य तथा उनका प्रयोग अन्य विज्ञानों में भी व्यापक रूप से

हो रहा है । निरन्तर शोध के द्वारा उनमें सुधार हो रहा है । अत: सांख्यिकी में गतिशीलता का गुण भी विद्यमान है । इसी प्रकार सांख्यिकी द्वारा तथ्यों को निष्पक्ष रूप में प्रस्तुत किया जाता है, अत: सांख्यिकी एक विज्ञान है । फिर भी बहुत से विद्वान इसे विज्ञान न मानकर केवल वैज्ञानिक विधि की संज्ञा देते हैं । प्रो. वालिस व रोबर्टस लिखते है "सांख्यिकी स्वतन्त्र व मौलिक ज्ञान का समूह नहीं है बल्कि ज्ञान प्राप्त करने की रीतियों का समूह है । वास्तव में सांख्यिकी विशुद्ध विज्ञान तो नहीं लेकिन प्राणीशास्त्र की तरह का विज्ञान अवश्य है जिसके परिणाम कुछ सीमाओं के साथ यथार्थता के निकट होते हैं ।"

कला में निम्नलिखित विशेषताएँ होती हैं -

(1) कला उन **क्रियाओं का समूह** है जिनके द्वारा हम निश्चित परिणाम पर पहुँचते हैं ।

(2) वह **लक्ष्यों को प्राप्त करने का साधन** भी बतलाती है, केवल तथ्यों का वर्णन ही नहीं करती ।

(3) कला की साधना के लिए विशेष **चतुराई, अनुभव तथा आत्म संयम** की आवश्यकता होती हैं ।

सांख्यिकी में भी इस बात का अध्ययन किया जाता है कि विभिन्न समस्याओं से निष्कर्ष निकालने हेतु किस प्रकार से सांख्यिकीय रीतियों और नियमों का प्रयोग किया जाए । सांख्यिकी की रीतियों से प्रयोग हेतु विशेष दक्षता की आवश्यकता होती हैं । अत: सांख्यिकी कला भी है ।

अत: हम कह सकते हैं कि साख्यिको विज्ञान और कला दोनों ही है । टिप्पेट के अनुसार "सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों है । यह विज्ञान है क्योंकि इसकी रीतियाँ मौलिक रूप से व्यवस्थित है और उनका सर्वत्र प्रयोग होता है: और यह एक कला है क्योंकि इसकी रीतियाँ का सफल प्रयोग पर्याप्त सीमा तक सांख्यिकी की योग्यता व विशेष अनुभव तथा उसके प्रयोग के क्षेत्र (जैसे अर्थशास्त्र) के ज्ञान पर निर्भर करता है ।"

1.4.3 सांख्यिकी के उद्देश्य

सांख्यिकी का मुख्य उद्देश्य विभिन्न तथ्यों व समस्याओं का अध्ययन करना तथा उनमें होने वाले विभिन्न परिवर्तनों के कारणों व परिणामों का मूल्यांकन करना है । **प्रो. बॉडिगंटन** के अनुसार "सांख्यिकीय अनुसन्धान का मुख्य उद्देश्य भूतकालीन एवं वर्तमान तथ्यों की तुलना करके यह करना है कि जो भी परिवर्तन हुए हैं उनके क्या-क्या कारण है और उनके क्या-क्या परिणाम भविष्य में हो सकते हैं । "सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग द्वारा ही किसी समस्या से सम्बन्धित - भूतकालीन समंक एकत्रित किये जा सकते है और वर्तमान प्रवृत्तियों से उनकी यथोचित तुलना की जा सकती है । इनके द्वारा घटनाओं में होने वाले परिवर्तनों के कारणों और उनके प्रभावों का विवेचन किया जा सकता है ।

1.4.4 सांख्यिकी की सीमाएँ

सांख्यिकी विज्ञान का व्यापक उपयोग होने के बावजूद इसकी कुछ परिसीमाएँ भी है ।समंको का विश्लेषण एवं निवर्चन करते समय इन सीमाओं को ध्यान में रखना परमावश्यक है अन्यथा निष्कर्ष भ्रामक हो सकते है ।सांख्यिकी की निम्नलिखित सीमायें हैं :-

(1) सांख्यिकी केवल संख्यात्मक तथ्यों का ही अध्ययन करती है, गुणात्मक तथ्यों का नहीं- सांख्यिकी शास्त्र की एक सीमा यह है कि इसमें केवल संख्यात्मक तथ्यों और समस्याओं का ही अध्ययन किया जाता है गुणात्मक तथ्यों का नहीं । दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि सांख्यिकी में केवल ऐसे तथ्यों का ही अध्ययन किया जाता है जिन्हें संख्या के रूप में अभिव्यक्त किया जा सके जैसे आय, ऊँचाई, लम्बाई एवं उत्पादन इत्यादि । परन्तु इसके विपरीत कुछ तथ्य ऐसे है जिनका संख्यात्मक वर्णन तो सम्भव नहीं हो पाता परन्तु उनके गुणात्मक स्वरूप का अध्ययन करना पड़ता है, जैसे चरित्र, बुद्धिमत्ता, सुन्दरता इत्यादि । इन तथ्यों का अध्ययन सांख्यिकी के अन्तर्गत नहीं किया जा सकता है । लेकिन गुणात्मक तथ्यों को अप्रत्यक्ष रूप से संख्याओं में बदल कर सांख्यिकी के अन्तर्गत अध्ययन किया जा सकता है ।

(2) सांख्यिकी समग्र का अध्ययन करती है, व्यक्तिगत ईकाइयों का नहीं- सांख्यिकी समूह का अध्ययन करती है व्यक्ति का नहीं । उदाहरणार्थ किसी राष्ट्र की प्रति व्यक्ति आय में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती है तो इसका आशय यह नहीं है कि प्रत्येक व्यक्ति की आय में 10 प्रतिशत की वृद्धि हुई है । यह भी सम्भव है कि कुछ व्यक्तियों की आय स्थिर रही हो या कुछ की कम भी हुई हो । इस प्रकार सांख्यिकी की यह विशेषता है कि (इसमें व्यक्तिगत इकाइयों की विशेषताओं पर ध्यान नहीं दिया जाता है वरन् निकलने वाला प्रत्येक निष्कर्ष समूह का प्रतिनिधित्व करता है ।)

(3) सांख्यिकी के निष्कर्ष दीर्घकाल में औसत रूप से ही सत्य होते है - सांख्यिकी के नियम प्राकृतिक विज्ञान के नियमों की भांति सभी परिस्थितियों में सही नहीं होते । वे केवल औसत रूप से दीर्घकाल में ही सत्य होते है, क्योंकि सांख्यिकी में पूर्ण शुद्धता प्राप्त करना संभव नहीं है । अत: यथोचित स्तर की शुद्धता ही पर्याप्त मानी जाती है । भौतिक शास्त्र का गुरूत्वाकर्षण का नियम हर समय एवं हर परिस्थिति में सही होता है किन्तु सांख्यिकी के सम्बन्ध में ऐसा नहीं है, जैसे सांख्यिकी का मुख्य नियम 'सम्भावना सिद्धान्त' यह बताता है कि यदि ताश के बावन पत्तों में से एक पत्ता खींचा जाए तो काला पान का पत्ता आने की संभावना 25 प्रतिशत है किन्तु हो सकता है कि चार पत्ते खींचने पर उसमें एक के स्थान पर दो पत्ते काले पान के आ जाएं किन्तु जैसे अधिक पत्ते खींचते जायेंगे निष्कर्ष सम्भावना सिद्धान्त के समीप होते जाएंगे । इसलिए कहा जाता है कि सांख्यिकी के निष्कर्ष औसत रूप से एवं दीर्घकाल में ही सत्य होते है ।

(4) सांख्यिकी समंको में एकरूपता तथा सजातीयता आवश्यक है - सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब समंको में एकरूपता व सजातीयता हो । तुलना के लिए समंको का सजातीय होना आवश्यक है, नहीं तो अनुपयुक्त तुलना से समंको का दुरूपयोग होगा ओर निष्कर्ष भ्रामक परिणाम देगे ।

(5) बिना सन्दर्भ के सांख्यिकी के निष्कर्ष भ्रामक हो सकते है- सांख्यिकी के निष्कर्षो को सही-2 समझने के लिए उनके सन्दर्भ का भी अध्ययन करना आवश्यक है अन्यथा वे असत्य सिद्ध हो सकते है । बिना सन्दर्भ व परिस्थितियों को समझते हुए जो निष्कर्ष निकाले जाते हैं वे यद्यपि सत्य जान पड़ते हैं परन्तु वास्तविक रूप से वे निष्कर्ष सत्य नहीं होते । उदाहरणार्थ यदि घी के मूल्य बढ़ जाने से नमक के मूल्य भी बढ़ जाये तो यह निष्कर्ष निकाल लेना कि नमक के मूल्य को बढ़ाने के लिए घी का मूल्य बढ़ाना आवश्यक है- अनुचित व भ्रामक होगा, क्योंकि दोनों

के मूल्यों में कोई सहसम्बन्ध नहीं है । वास्तव में दोनों वस्तुओं के मूल्यों के बढ़ने के कारण अलग-अलग थे । अत: बिना सन्दर्भ देखें किसी तथ्य को समान मान लेना एक भयंकर भूल होगी।

(6) सांख्यिकी रीति अध्ययन की एकमात्र रीति नहीं है - किसी समस्या के अध्ययन के लिए सांख्यिकीय रीति का प्रयोग आवश्यक है किन्तु इसके निष्कर्षो का प्रयोग करने से पूर्व इनकी अन्य रीतियों द्वारा जाँच कर ली जानी चाहिए क्योंकि सांख्यिकीय रीति ही अध्ययन की एकमात्र रीति नहीं है । **क्राक्सटन एवं काउडेन** के अनुसार, "यह नहीं मान लेना चाहिए की सांख्यिकीय रीति ही अनुसन्धान कार्य में प्रयोग की जाने वाली एकमात्र रीति है, न ही इस रीति को प्रत्येक प्रकार की समस्या का सर्वोत्तम हल समझना चाहिए ।"

(7) सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग विशेषज्ञ ही कर सकते है - डा. बाउले के शब्दों में "समंक केवल एक आवश्यक किन्तु अपूर्ण औजार प्राप्त करते है जो उन लोगों के हाथों में खतरनाक है जो उनकी प्रयोग विधि और कमियों से परिचित नहीं है ।" इससे स्पष्ट है कि सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग उन्हीं व्यक्तियों ***द्वारा*** किया जाना चाहिए जिन्हें इनका प्रारम्भिक ज्ञान हो अन्यथा इन विधियों के गलत प्रयोग से समंको का दुरूपयोग होगा और निष्कर्ष भ्रामक परिणाम देगें । सांख्यिकी एक उपयोगी विज्ञान उन्हीं व्यक्तियों के लिए है जो इसका उचित प्रयोग जानते है ।

1.5 सांख्यिकी का महत्व

सांख्यिकी एक ऐसी महत्वपूर्ण वैज्ञानिक विधि है जिसका प्रयोग सभी सामाजिक एवं प्राकृतिक विज्ञानों में किया जाता है । वास्तव में यह सभी विज्ञानों के उपादान के रूप में प्रयोग में लाया जाने वाला अस्त्र है जिसे किसी भी समस्या के निदान में प्रयोग में लाया जाता है । विभिन्न क्षेत्रों व कार्यो में सांख्यिकी का उपयोग तथा महत्व निम्न प्रकार से स्पष्ट किया जा सकता है-

(1) आर्थिक नियोजन में महत्व - टिप्पेट के अनुसार "नियोजन आजकल का व्यवस्थित क्रम है ओर समंकों के बिना नियोजन की कल्पना भी नहीं की जा सकती । 'वर्तमान में संसार के लगभग सभी राष्ट्र योजनाबद्ध विकास की प्रक्रिया को अपना रहें हैं । नियोजन चाहे दीर्घकालीन हो या अल्पकालीन, किसी विशेष उद्देश्य के लिए ही अपनाया जाता है, इन उद्देश्यों का निर्धारण एवं प्रगति का अध्ययन सांख्यिकी के बिना सम्भव नहीं है । भारतीय योजना आयोग ने भी पंचवर्षीय योजना के प्रारूप निर्धारण में सांख्यिकी के महत्व को स्वीकार किया है । नियोजन में सांख्यिकी के महत्व को निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है :-

- किसी देश की आर्थिक योजनाओं के निर्माण में उपलब्ध साधनों, मुख्य समस्याओं और आवश्यकताओं से सम्बन्धित सामग्री, बिना समंको के सम्भव नहीं है ।
- देश की आवश्यकताओं के अनुरूप अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन लक्ष्यों का निर्धारण समंको की सहायता से ही किया जाता है ।
- वित्तिय साधनों, कितनी मात्रा में, कहॉ -कहॉ से उपलब्ध होंगे, आदि बातों का सही-सही अनुमान सांख्यिकी के माध्यम से ही लगाया जाता है ।

– विभिन्न मदों पर व्यय बँटवारे के लिए भी सांख्यिकी से ही सहायता मिलती है ।
– योजना की उपलब्धियो का विश्लेषण सांख्यिकीय रीतियों द्वारा ही सम्भव है ।

इस प्रकार से यह कहा जा सकता है कि "समंको के बिना आर्थिक नियोजन पतवार और दिशा सूचक यन्त्र रहित जहाज की भाँति है ।" जिस तरह से पतवार व दिशा सूचक यन्त्र न होने पर जहाज पथभ्रष्ट और दिग्भ्रमित होने की सम्भावना रहती है उसी प्रकार पर्याप्त व यथार्थ समंकों के अभाव में नियोजन के निर्धारित लक्ष्य प्राप्त करना मुश्किल है । वास्तव में यह अंधेरे में छलांग लगाने के समान है ।

(2) शासन प्रबन्ध में महत्व - प्राचीन काल से ही सांख्यिकी का प्रयोग राज्य प्रबन्ध को सुचारू रूप से चलाने के लिए चला आ रहा है । परन्तु आजकल राज्य के कार्यो में आशातीत वृद्धि होने के कारण समंकों की उपयोगिता और भी अधिक हो गई है । आधुनिक राज्य कल्याणकारी राज्य है । अत: शासन प्रबन्ध का कार्य सुरक्षा व्यवस्था तक ही सीमित नहीं रहा है । अत: शासन प्रबन्ध में समंकों का महत्व अत्यधिक बढ़ गया है । शासन प्रबन्ध में सांख्यिकी का प्रयोग निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है :-

– सरकारी बजट (Budget) प्रचलित वर्ष तथा आगामी वर्ष के विभिन्न समंकों के आधार पर ही किया जाता है ।
– देश एवं जनता की आवश्यकताओं के अनुसार रक्षा, जनस्वास्थ्य, शिक्षा, प्रशासन आदि विभिन्न मदों पर किए जाने वाले व्यय का निर्धारण किया जाता है ।
– जनसंख्या, उत्पादन, आयात-निर्यात, राष्ट्रीय आय इत्यादि के पर्याप्त समंको की सहायता से ही वित्तमंत्री द्वारा यह निर्णय किया जाता है कि किन करों में वृद्धि की जाए एवं किन में कमी ।
– सरकार द्वारा प्रसारित विभिन्न प्रतिवेदनों का आधार सांख्यिकी ही है ।

(3) व्यवसाय में महत्व - व्यवसाय में समंकों के महत्व को स्पष्ट करते हुए ब्लेयर ने लिखा है कि, "यदि समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, रेडियो और तार की रिपोर्टो से प्राप्त मूल्य समंक एक दिन के लिए हटा दिए जाए तो व्यावसायिक जगत शक्तिहीन हो जाएगा । यदि आजकल के कुछ उपलब्ध समंक संसार से एक वर्ष के लिए हटा दिए जाए तो इसका परिणाम होगा - आर्थिक अव्यवस्था तथा विनाश ।" व्यवसाय में सांख्यिकी के महत्व को निम्न प्रकार से स्पष्ट किया जा सकता है :-

– एक व्यापारी को वस्तु की मांग, क्रय-विक्रय के सम्बन्ध में पूरी जानकारी प्राप्त करनी पड़ती है । माँग का पूर्वानुमान लगाने के लिए उपभोक्ताओं की रूचि, फैशन, आय आदि तत्वों का ध्यान रखना पड़ता है । इन सबके निर्धारण में सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग किया जाता है । एक व्यवसायी के अनुमान जितने अधिक सही होंगे उतना ही वह सफल हो सकता है ।
– सांख्यिकीय विधियों के द्वारा सामग्री के विभिन्न स्तर - अधिकतम, न्यूनतम औसत स्तरों व आदेश मात्रा का निर्धारण सामग्री नियंत्रण में महत्वपूर्ण योगदान देता है ।
– वस्तुओं की किस्म में एकरूपता बनाये रखने के लिए सांख्यिकीय किस्म नियन्त्रण का सहारा लिया जाता है।

– उत्पादन नियोजन इस प्रकार किया जाता है कि आवश्यकतानुसार तैयार माल की उपलब्धि हो तथा अनावश्यक भण्डारण न करना पड़े । यह सांख्यिकी द्वारा ही सम्भव है।
– श्रमिकों के सम्बन्ध में समय व गति अध्ययन व जीवन निर्वाह सूचकांक के द्वारा सांख्यिकी ही श्रमिकों के हितों की रक्षा करती है ।
– सांख्यिकी द्वारा विक्रय पूर्वानुमान, बाजार सर्वेक्षण, विक्रय संवर्धन की पद्धति का चुनाव तथा काल श्रेणी को अध्ययन द्वारा उत्पाद की बिक्री से सम्बन्धित महत्वपूर्ण निर्णय लिये जाते हैं ।
– स्कन्ध विपणी (Stock Exchange) बाजारों में मूल्यों की प्रवृति (Trend) के आधार पर ही सटोरिये एवं दलाल शेयर खरीदने का निर्णय लेते है ।
– बैंक, बीमा, विद्युट, रेल एवं यातायात विभाग का आधार भी सांख्यिकी ही है ।

(4) अर्थशास्त्र में महत्व - अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी में घनिष्ठ सम्बन्ध है । अर्थशास्त्र में किसी भी समस्या का समाधान बिना सांख्यिकी के प्रयोग के संभव नहीं हो पाता । आर्थिक जगत के नियमों व नीतियों के निर्धारण में जिन प्रणालियों का प्रयोग किया जाता है वह बहुत कुछ सीमा तक समंकों के प्रयोग व निर्वचन पर निर्भर करती है । अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का महत्व इस प्रकार है :-

– उपभोग के अन्तर्गत इच्छाओं की सापेक्षता, जीवन स्तर, विभिन्न मदों पर व्यय तथा मांग की लोच जैसी समस्याओं का मूल्यांकन समंकों के द्वारा ही सम्भव हो पाता है ।
– उत्पादन के क्षेत्र में राष्ट्रीय आय का अनुमान राष्ट्रीय लाभांश का मूल्यांकन, उत्पादन, नीतियों का निर्धारण, पूँजी निर्माण तथा राष्ट्रीय सम्पत्ति का ज्ञान केवल समंकों के प्रयोग द्वारा ही सम्भव हो सकता है ।
– विनिमय क्षेत्र में समंकों द्वारा व्यावसायिक उन्नति, व्यपारिक ढाँचा, आयात-निर्यात, देश का भुगतान-सन्तुलन तथा देश में उपलब्ध मुद्रा की मात्रा जैसी अनेक समस्याओं का समाधान किया जाता है ।
– सांख्यिकी वितरण के क्षेत्र में राष्ट्रीय सम्पत्ति के वितरण का आधार, राष्ट्रीय लाभांश का उत्पति के साधनों में आवंटन, प्रति व्यक्ति आय तथा उसका विभिन्न कालों में तुलनात्मक अध्ययन तथा समाज के विभिन्न वर्गो की आर्थिक स्थिति का ज्ञान करने में सहयोग प्रदान करती है ।

संक्षेप में, सांख्यिकी का महत्व नियोजन, प्रशासन, अर्थशास्त्र, राजनीति शास्त्र, बीमा कम्पनियों, रेले, सट्टे के कार्यो तथा उद्योग धन्धो में अत्यधिक है । यह वह विज्ञान है जिसका प्रत्येक समय तथा प्रत्येक क्षेत्र में प्रयोग किया जा सकता है । टिप्पेट के शब्दों में, "सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है और जीवन को, अनेक बिन्दुओं पर स्पर्श करती है ।"

1.6 सारांश

प्राचीन काल में सांख्यिकी की उत्पति “राजाओं के विज्ञान" के रूप में हुई थी । **बहु वचन संज्ञा** के रूप में सांख्यिकी का अर्थ व्यक्तिगत ईकाइयों के समूह से सम्बन्धित संख्यात्मक तथ्यों

से है । **एकवचन संज्ञा** के रूप में सांख्यिकी का अभिप्राय एक ऐसे विज्ञान से लगाया जाता है जिसमें समंकों के संकलन, विश्लेषण एवं निर्वचन से सम्बन्धित विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों का अध्ययन किया जाता है ।

उचित परिभाषा - "सांख्यिकी विज्ञान एवं कला दोनों है जो सामाजिक, आर्थिक तथा प्राकृतिक समस्यों के अध्ययन एवं समाधान के उद्देश्य से समंको का संग्रहण, वर्गीकरण, सारणीयन, प्रदर्शन, विश्लेषण एवं निर्वचन करती है और इनमें सम्बन्धित वैज्ञानिक रीतियों के प्रयोग से अन्य भौतिक एवं सामाजिक विज्ञानों को समझने में मदद करती है ताकि निर्धारित उद्देश्य की पूर्ति हो सके ।'

सांख्यिकी का क्षेत्र - सांख्यिकी के क्षेत्र के अन्तर्गत विषय सामग्री, (सांख्यिकीय रीतियाँ एवं व्यावहारिक सांख्यिकी) प्रकृति, उद्देश्य तथा सीमाओं को शामिल किया जा सकता है । सांख्यिकी रीतियां संग्रहण, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण, निर्वचन तथा पूर्वानुमान है । प्रकृति के रूप में सांख्यिकी कला तथा विज्ञान दोनों है । सांख्यिकी का उद्देश्य विभिन्न तथ्यों व समस्याओं का अध्ययन करना तथा उनमें होने वाले विभिन्न परिवर्तनों, कारणों व परिणामों का मूल्यांकन करना है । सांख्यिकी की कुछ सीमाएं भी हैं । जैसे - केवल संख्यात्मक अध्ययन, केवल समग्र का अध्ययन, सांख्यिकी निष्कर्ष औसत रूप से ही सत्य, बिना सन्दर्भ निष्कर्ष भ्रामक, विशेषज्ञों द्वारा ही प्रयोग किया जाना संभव आदि ।

सांख्यिकी का महत्व - आज कोई भी क्षेत्र सांख्यिकी के प्रयोग से अछूता नहीं है । आर्थिक नियोजन, शासन व्यवस्था, व्यवसाय तथा अर्थशास्त्र में इसका अत्यन्त महत्व है ।

1.7 स्वपरख प्रश्न

1. सांख्यिकीय समंकों से आप क्या समझते हैं? सांख्यिकी समंकों की विशेषताएँ बताइए ।
2. सांख्यिकी की परिभाषा दीजिए । इसके महत्व एवं सीमाओं का वर्णन कीजिए ।
3. सांख्यिकी की परिभाषा दीजिए । विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों को समझाइए ।
4. "सांख्यिकी समंक संख्यात्मक तथ्य है, परन्तु सभी संख्यात्मक तथ्य सांख्यिकीय समंक नहीं है ।" इस कथन को स्पष्ट कीजिये तथा संक्षेप में बताइये कि कौन से संख्यात्मक तथ्य समंक है ।
5. सांख्यिकी की प्रकृति महत्व, एवं सीमाओं पर प्रकाश डालिये ।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

- **कैलाश नाथ नागर :** सांख्यिकी के मूल तत्व (मेरठ : मीनाक्षी प्रकाशन) अध्याय 1-2
- **एसपी. सिंह :** सांख्यिकी के मूल तत्व (नई दिल्ली : एस. चन्द एण्ड क0 लि0) अध्याय 1-2
- **ओसवाल, अग्रवाल, भार्गव, तिवाड़ी, मीणा** : व्यावसायिक सांख्यिकी (जयपुर-नई दिल्ली : रमेश बुक डिपो") अध्याय 1 -2

इकाई-2

समंक एवं समंको का संग्रहण

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य
2.1 प्रस्तावना
2.2 समंको का संग्रहण
2.3 समंको के प्रकार
2.4 प्राथमिक समंको के संग्रहण की रीतियाँ
2.4.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान
2.4.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान
2.4.3 स्थानीय स्त्रोतों या सम्बाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति
2.4.4 सूचको से प्रश्नावली भरवाकर
2.4.5 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरना
2.5 द्वितीयक समंको के संग्रहण के स्त्रोत
2.5.1 प्रकाशित स्त्रोत
2.5.2 अप्रकाशित स्त्रोत
2.6 योग संक्रिया
2.7 योग संक्रिया के नियम
2.8 सारांश
2.9 स्वपरख प्रश्न

2.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि-

- समंक एवं समंको के प्रकार के बारे में बतला सकें ।
- समंको के संग्रहण की रीतियों एवं उनके गुणदोषो को समझा सकें ।
- योग संक्रिया का अर्थ समझा सकें ।
- योग संक्रिया के नियमो को लागू कर सकें ।

2.1 प्रस्तावना

सांख्यिकी के अर्थ, परिभाषाओ विधियों एवं महत्व के बारे में आप इकाई एक में विस्तार पूर्वक पढ़ चुके हैं । सांख्यिकी की बहुवचन के रूप में दी गई परिभाषाओं के अंतर्गत हमने समंको की परिभाषाओं एवं विशेषताओं का भी सविस्तार अध्ययन किया है । इस इकाई में आप समंको के प्रकार एवं समंको के संग्रहण की रीतियाँ का अध्ययन करेंगें । साथ ही हम योग संक्रिया के नियमों की चर्चा भी इस अध्याय में करेंगे ।

2.2 समंको का संग्रहण : अर्थ एवं परिभाषा

अनुसंधान का एक महत्वपूर्ण चरण समंक स्त्रोत है । समंक स्त्रोत का अर्थ है वांछित तथ्यों को तलाश करके उन्हें एकत्रित करना। एक सांख्यिकी द्वारा अनुसंधान की व्यापक योजना बनाने के पश्चात समंको के संकलन का कार्य आरम्भ किया जाता है । यदि समंक पत्र पत्रिकाओं या पुस्तकों में प्रकाशित है तो उन्हें एकत्रित कर एक स्थान पर रखना और यदि वह पहले से कहीं उपलब्ध नहीं है तो उन्हें नये सिरे से प्राप्त करना ही समंको का संग्रहण कहलाता है ।

"समंको के संग्रहण का तात्पर्य अनुसन्धान के अन्तर्गत आने वाली अध्ययन के विषय से सम्बद्ध इकाइयों द्वारा उद्देश्यपूर्ण सूचनाओं का एकत्रीकरण से है" । समंको का संग्रहण सांख्यिकी विज्ञान की मूलभूत क्रिया है क्योंकि अनुसंधान के लिए समंक मूल आधार है और उसकी सफलता पूरी तरह से समंको पर निर्भर करती है । समंको की पर्याप्तता और उनमें शुद्धता होना भी जरूरी है ताकि उनसे सही निष्कर्ष प्राप्त किये जा सकें । अत; समंको का संकलन करने समय अत्यन्त सावधानी सतर्कता निष्पक्षता का ध्यान रखा जाना चाहिए ताकि समंकों के रूप में एकत्रित सामग्री शुद्ध व विश्वसनीय हो अन्यथा भ्रामक परिणाम प्राप्त होने की सम्भावना सदैव बनी रहती है ।

2.3 समंकों के प्रकार

समंक दो प्रकार के होते है - (अ) प्राथमिक समंक तथा (ब) द्वितीयक समंक

(अ) प्राथमिक समंक - प्राथमिक समंक उन समंको को कहते है जो अनुसधानकर्त्ता द्वारा किसी किसी विशेष उद्देश्य हेतु पहली बार आरम्भ से अन्त तक बिलकुल नये सिरे से एकत्रित किये जाते हैं । दूसरे शब्दों में, वे समंक जो किसी सांख्यिकीय अनुसंधान के लिए किसी अनुसंधानकर्ता या एजेन्सी द्वारा मौलिक रूप से पहली बार एकत्र किये जाते हैं प्राथमिक समंक कहलाते हैं । उदाहरण के लिए राजस्थान के किसी औद्योगिक उपक्रम के मजदूरों के जीवन स्तर के बारे में यदि कोई अनुसंधानकर्ता नये सिरे से मौलिक रूप में समंक एकत्र करता है तो वे उसके लिए प्राथमिक समंक कहलाएंगे ।

(ब) द्वितीयक समंक - द्वितीयक समंक वे समंक है जो पहले ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्रित व प्रकाशित किये जा चुके हैं और अनुसंधानकर्ता केवल उसका प्रयोग करता है । अत: ऐसे समंक नये एवं मौलिक नहीं होते । अनुसंधानकर्ता उन्हें स्वयं एकत्र भी नही करता बल्कि दूसरे लोगों द्वारा एकत्रित समंको का स्वयं के लिये प्रयोग करता है । उपरोक्त उदाहरण में यदि अनुसंधानकर्ता सरकार द्वारा संकलित औद्योगिक श्रम सम्बन्धी समंको को प्रयोग कर लेता है तो वे उसके लिए द्वितीयक समंक माने जायेगें ।

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंको में अन्तर - इनमें निम्न अन्तर प्रमुख हैं:-

(1) प्राथमिक समंक मौलिक होते है अर्थात् सांख्यिकी विधियों में ये कच्चे माल की भाँति कार्य करते हैं जबकि द्वितीयक समंक मौलिक न होकर निर्मित माल की तरह होते हैं ।

(2) प्राथमिक समंक उद्देश्य के अनुकूल ही एकत्रित किये जाते है जबकि द्वितीयक समंको में उद्देश्य के अनुसार संशोधन करना पड़ता है ।

(3) प्राथमिक समंको के संग्रहण में अधिक धन, समय व परिश्रम की आवश्यकता होती है जबकि द्वितीयक समंकों पर समय, धन एवं परिश्रम की बहुत कम आवश्यकता होती है ।

2.4 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की रीतियाँ

प्राथमिक समंको के संग्रहण के लिए निम्नलिखित पाँच रीतियाँ काम में लायी जाती हैं-

2.4.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान- इस रीति के अन्तर्गत अनुसंधानकर्ता स्वयं अनुसंधान क्षेत्र में जाकर सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करके सूचना प्राप्त करता है । चूंकि इस रीति में सूचना स्वयं उसी व्यक्ति विशेष से प्राप्त की जाती है एवं अनुसंधानकर्त्ता स्वयं क्षेत्र मे जाकर सूचना प्राप्त करता है अत: इसे प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान कहा जाता है । इस रीति का सर्वप्रथम प्रयोग यूरोप में श्री ली प्ले और भारत में आर्थर यंग ने किया था ।

रीति का प्रयोग - (1) जब समंको की मौलिकता व शुद्धता की आवश्यकता हो ।(2) जब अनुसंधान का क्षेत्र सीमित हो। (3) जब समंको को गोपनीय रखना हो । (4) जब अनुसन्धानकर्ता के वैयक्तिव अनुभव, तीक्ष्ण बुद्धि व सतत् निरीक्षण की आवश्यकता हो । सीमित क्षेत्र मे पारिवारिक आय व्यय, मजदूरों का जीवन स्तर, शिक्षा बेरोजगारी आदि से सम्बन्धित अनुसन्धान अधिकतर इसी रीति द्वारा किए जाते है ।

गुण -

(1) शुद्धता एवं मौलिकता - अनुसन्धानकर्त्ता क्षेत्र में व्यक्तिगत रूप से होने के कारण एकत्रित समंको मे अपेक्षाकृत अधिक मौलिकता रहती है एवं शुद्धता भी उच्च स्तर की पायी जाती है ।

(2) विश्वस्त सूचना - इसमें अनुसंधानकर्त्ता को मुख्य विषय के अतिरिक्त और भी अनेक सूचनाएँ उपलब्ध हो जाती है और वे पूर्ण रूप से विश्वसनीय होती हैं ।

(3) लोचदार - यह रीति लोचदार है । अनुसंधाकर्त्ता आवश्यकतानुसार प्रश्नों में थोड़ा बहुत परिवर्तन करके मनचाही सूचना प्राप्त कर सकता है ।

(4) सजातीयता - चूँकि इस रीति के अन्तर्गत सूचनाएँ एक ही व्यक्ति द्वारा एकत्र की जाती है इसलिये समंको में एकरूपता बनी रहती है । एकरूपता होने पर समंको की तुलना आसानी से की जा सकती है ।

(5) विश्वसनीयता - इस रीति में अनुसंधानकर्ता के स्वयं कार्यक्षेत्र में- उपस्थित होने के कारण प्राप्त आकड़े अत्यधिक विश्वसनीय होते है ।

(6) उपयुक्तता - यह विधि गहन जाँच के लिए अधिक उपयोगी है ।

दोष:-

(1) सीमित क्षेत्र - इस रीति का उपयोग सीमित क्षेत्र मे ही किया जा सकता है । विस्तृत अनुसन्धान क्षेत्रों में यह रीति अनुपयुक्त हैं ।

(2) पक्षपात - इस प्रणाली में अनुसंधानकर्ता के व्यक्तिगत पूर्वाग्रह, पक्षपात तथा सनक (Whims) के कारण परिणामों के दूषित होने की पूरी सम्भावना बनी रहती है ।

(3) अपव्यय - इस रीति में धन, समय व परिश्रम अधिक करना पड़ता है ।

(4) भ्रामक निष्कर्ष - क्षेत्र सीमित होने से यह संभव है कि समंक पूरे समग्र का सही प्रतिनिधित्व न करे और इस कारण भ्रामक निष्कर्ष प्राप्त हों ।

2.4.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान - इस रीति में सूचना उन व्यक्तियों से प्राप्त नहीं की जाती जो अनुसंधान से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित होते है वरन् अप्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित तृतीय पक्षकारों जिन्हें साक्षी कहा जाता है, के माध्यम से प्राप्त करते हैं । इन साक्षियों से मौखिक प्रश्न पूछकर लिख लिये जाते हैं । उदाहरण के तौर पर श्रमिकों से सम्बन्धित सूचनाएँ श्रमिकों से न पूछकर श्रमिक संघो, मिल मालिकों से एकत्रित की जाए ।

रीति का प्रयोग - (1) जहाँ अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत हो (2) सूचकों से प्रत्यक्ष सम्पर्क संभव न हो या अज्ञान रूचिहीनता के कारण सूचना देने मे असमर्थ हों । (3) जब विषय से सम्बन्धित व्यक्तियों से प्रश्न करना उचित ही न समझा जाये या इसे गुप्त रखना हो ।

इस रीति का प्रयोग सामान्यत: सरकारी स्तर पर नियुक्त आयोग तथा समितियों किया जाता है । अपराधों की जाँच पड़ताल के मामले में भी यह रीति उपयुक्त है ।

गुण - इस रीति के प्रमुख गुण निम्न है :

(1) सरल - यह रीति अपेक्षाकृत सरल व सुविधाजनक है क्योंकि इसमें कार्य शीघ्रता से हो जाता है और अधिक परेशानी नहीं उठानी पडती ।

(2) मितव्ययी - इस प्रणाली में समय, धन व परिश्रम की बचत होती है ।

(3) विस्तृत क्षेत्र - यह रीति विस्तृत क्षेत्र में और ऐसे मे जहाँ पर सूचक रूचि नहीं लेते हों, अधिक उपयुक्त है।

(4) निष्पक्षता - इसमें जाँचकर्त्ता की व्यक्तिगत भावना का प्रभाव अपेक्षाकृत कम रहता है ।

(5) विशेषज्ञो की सम्मति - इस रीति में विशेषज्ञो की सम्मति व सुझाव अचानक ही प्राप्त हो जाते हैं ।

(6) गुप्त सूचना - इसमें अन्य पक्षकारो से ऐसी सूचना प्राप्त हो जाती है जो स्वयं सूचक अपने बारे में या तो देना नहीं चाहता या गलत सूचना देता है ।

दोष - इस रीति के प्रमुख दोष निम्न है :

(1) अशुद्ध परिणाम - इस रीति द्वारा अनुसंधानकर्ता को अप्रत्यक्ष सूचना उपलब्ध होती है क्योंकि वह समस्या से प्रत्यक्ष सम्बन्ध रखने वाले व्यक्तियों के सम्पर्क में नही आता अत: परिणाम अशुद्ध होने की सम्भावना रहती है ।

(2) साक्षियों के दोष - साक्षियों की लापरवाही, अज्ञानता व पक्षपात के कारण समंक दूषित हो जाते हैं ।

(3) एकरूपता का अभाव - विभिन्न प्रकृति के सूचकों से प्राप्त सूचना में सजातीय का गुण समाप्त हो जाता है जिससे समंक अतुलनीय हो जाते हैं ।

2.4.3 स्थानीय स्त्रोतों या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति:- इस रीति के अन्तर्गत अनुसंधानकर्ता द्वारा भिन्न जगहों पर स्थानीय व्यक्ति या विशेष संवाददाता नियुक्त कर दिये जाते है जो समय-समय पर अनुभव या अनुमान के आधार पर सूचना भेजते रहते हैं ।

उल्लेखनीय बात यह है कि ये संवाददाता सूचनाओं का संकलन अपने ही तौर तरीकों, रूचि, निर्णय आदि के आधार पर करते हैं ।

रीति का प्रयोग - (1) इस रीति का प्रयोग अधिकतर समाचार पत्रों, पत्रिकाओं और आकाशवाणी द्वारा किया जाता है । (2) यह रीति ऐसे जाँच विषयों के लिये ही अधिक उपयुक्त है जिनमें शुद्धता की कम आवश्यकता होती हैं।

गुण-

(1) विस्तृत क्षेत्र - दूर-दूर तक के विस्तृत क्षेत्र से सूचना एकत्रित करने के लिए अधिक उपयोगी है ।

(2) मितव्ययी - इस रीति मे समय, धन और परिश्रम की बचत होती है ।

दोष -

(1) शुद्धता व मौलिकता का अभाव - चूँकि प्रणाली मुख्यतया अनुमानों पर आधारित है अत: एकत्रित सूचना में शुद्धता व मौलिकता कम होती है ।

(2) एकरूपता का अभाव - अलग-अलग सम्वाददाताओं द्वारा सूचना एकत्र करनें के आधार व तरीके भिन्न-भिन्न होते हैं । फलस्वरूप समंको मे एकरूपता नहीं रहती ।

(3) अभिनत निष्कर्ष - सम्वाददाताओं की मनोवृत्तियाँ और पूर्व धारणायें समंको को प्रभावित किये बिना नही रह पाती जिससे निष्कर्ष अभिनत तथा एकांगी हो जाते हैं ।

(4) विलम्ब - इस प्रणाली मे कभी-कभी सम्वाददाताओं द्वारा सूचनायें इतनी देर से भेजी जाती है कि विषय का महत्व ही समाप्त हो जाता है ।

2.4.4. सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर - इस रीति मे सर्वप्रथम अनुसंधानकर्ता जाँच से सम्बन्धित प्रश्नों की सूची तैयार करता है, जिसे प्रश्नावली कहा जाता है ।

फिर वह उसकी अनेक प्रतियाँ डाक द्वारा सूचना देने वालों के पास भेज देता है जो उसको भर का निश्चित तिथि तक लौटा देते हैं । प्रश्नावाली के साथ एक अनुरोध पत्र भी लगाया जाता है जिसमें सूचना को एकत्र करने का उद्देश्य बताने के साथ सूचना को गुप्त रखे जाने का आश्वासन भी दिया जाता है । प्रश्नावली तैयार करते समय इस बात का विशेष ध्यान रखा जाता है कि प्रश्न सरल, स्पष्ट और छोटे हो, संख्या मे कम हो, उत्तेजना, शंका या विरोध उत्पन्न करने वाले न हो, अनुसंधान से प्रत्यक्ष रूप से संबंधित हो और उत्तर ही या अंक के रूप में प्राप्त किया जा सकें । इस प्रकार की सावधानियाँ लेने पर यह रीति उपयोगी सिद्ध होती हैं ।

रीति का प्रयोग - यह रीति ऐसे विस्तृत क्षेत्र के लिये उपयुक्त है जहाँ सूचक शिक्षित हो। अधिकांशतः मत-सर्वेक्षण (Opinion Surveys) उपभोक्ताओ की रूचियों का अनुसन्धान (Consumer aptitude surveys) आदि इस रीति किये जाते है ।

गुण -

(1) मितव्ययिता - विस्तृत क्षेत्र की सूचनाएँ कम समय एवं कम खर्च में उपलब्ध हो जाती हैं।

(2) विस्तृत क्षेत्र - यह रीति विस्तृत क्षेत्र में अत्यन्त उपयोगी है ।

(3) मौलिकता - सूचनाएँ स्वयं सूचकों दी जाती है: अत: मौलिकता का गुण विद्यमान रहता है ।

दोष-

(1) अस्पष्ट एवं अपूर्ण सूचना - कई बार सूचक प्रश्नावली भरकर वापिस ही नही भेजते या फिर अपूर्ण सूचना भेजते हैं।

(2) सीमित व्याप्ति - यह रीति केवल शिक्षित वर्ग तक ही सीमित है ।

(3) शुद्धता की कमी - यदि प्रश्नावली सावधानी से तैयार नहीं की जाती है तो प्रश्नों के गलत अर्थ लगाये जा सकते हैं। और आदि सूचकों मे पक्षपात की भावना होती है तो सूचनाएँ अशुद्ध ही प्राप्त होती हैं ।

(4) लोचशीलता का अभाव - अपर्याप्त सूचना प्राप्त होने पर प्रश्नावली में आवश्यक संशोधन करना संभव नही होता है।

(5) अव्यवहारिक - कई बार यह रीति अव्यावहारिक भी सिद्ध होती है क्योंकि अधिकांश सूचक अपने कुछ व्यक्तिगत मामलों जैसे आय सम्पत्ति आदि की सूचना लिखित मे देने को तैयार नहीं होते ।

2.4.5 प्रगणको द्वारा अनुसूचियाँ भरना - सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाने की रीति में अनेक सीमाएँ एवं कठिनाईयाँ है क्योंकि सूचनायें अपर्याप्त, अपूर्ण, अधूरी व अशुद्ध होती हैं । इन कमियों को दूर करने के लिए यह रीति अपनाई जाती है । इस रीति में प्रगणक अपने-अपने क्षेत्र में अनुसूचियाँ लेकर घर-घर जाते हैं और सूचकों से व्यक्तिगत रूप से प्रश्न पूछकर उनके उत्तर दर्ज कर लेते हैं । इस प्रकार इस रीति व इससे पहले वाली रीति में जहाँ कुछ समानता है वहीं आधारभूत अन्तर भी यह है कि पहली रीति मे प्रश्नावली सूचकों द्वारा भरी जाती है जबकि इस रीति में प्रगणको द्वारा सूचकों से प्रश्नों के उत्तर पूछकर अनुसूची को भरा जाता है ।

रीति का प्रयोग - इस रीति का प्रयोग बडे व्यापार में हों, सार्वजनिक उपक्रमों, शोध संस्थाओं, सरकारी तथा गैर सरकारी संस्थाओं द्वारा किया जाता है । भारत में जनगणना अनुसन्धान भी इसी रीति द्वारा किया जाता है।

गुण -

(1) विस्तृत क्षेत्र - इस प्रणाली द्वारा विस्तृत क्षेत्र मे सूचना एकत्रित की जा सकती है । साथ ही यह शिक्षित तथा अशिक्षित दोनों वर्गो के लिए उपयुक्त है ।

(2) शुद्धता - इस रीति में अनुसंधान योग्य, प्रशिक्षित तथा अनुभवी प्रगणकों द्वारा किया जाता है अत: शुद्धता काफी मात्रा मे रहती है ।

(3) विश्वसनीयता - व्यक्तिगत सम्पर्क होने के कारण जटिल प्रश्नों के भी शुद्ध व विश्वसनीय उत्तर प्राप्त हो सकते हैं ।

(4) निष्पक्षता - इसमें व्यक्तिगत पक्षपात का विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है क्योंकि प्रगणक अधिकतर पक्ष तथा विपक्ष दोनों प्रकार के होते हैं ।

दोष -

(1) **खर्चीली** - इस प्रणाली को अपनाने में धन व समय अधिक खर्च होता है अत: प्राय: सरकार ही इसे अपनाती है ।

(2) **जटिलता** - योग्य प्रशिक्षकों का चयन, उनकी प्रशिक्षण व्यवस्था व उनके कार्य का निरीक्षण आदि कार्यो के कारण यह रीति जटिल है ।

2.5 द्वितीयक समंकों के संग्रहण के स्त्रोत

द्वितीयक समंक प्रकाशित अथवा अप्रकाशित स्त्रोतों से उपलब्ध किये जा सकते हैं :-

2.5.1 प्रकाशित स्त्रोत - सरकारी व गैर सरकारी संस्थाएँ तथा अन्य अनुसन्धानकर्त्ता विभिन्न विषयों पर प्राथमिक अनुसन्धान द्वारा महत्वपूर्ण समंक एकत्रित करके उन्हें समय-समय पर प्रकाशित करते रहते हैं जिनका उपयोग अन्य व्यक्तियो द्वारा द्वितीयक समंको के रूप में किया जाता है । प्रकाशित समंकों के निम्नलिखित स्त्रोत है

(1) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन - विदेशी सरकारों तथा अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं के प्रकाशनो का द्वितीयक समंको के रूप में प्रयोग होता है जैस U॰N॰ Statistical Year Book, Demographic Year Book, Annual Reports of the I.M.F.,I.L.O., ASEAN SAARC आदि ।

(2) सरकारी प्रकाशन - केन्द्रीय तथा राज्य सरकारों के अनेक विभागों और मन्त्रालयों की और से समय-समय पर विभिन्न विषयों से सम्बन्धित समंको का प्रकाशन किया जाता है । इन समंको में विश्वसनीयता की मात्रा भी अधिक होती है । जैसे Five Year Plan Progress Reports, Census reports, R.B.I. BULLETIEN Economic Survey, Statisticial Abstract of India (Annual) आदि।

(3) अर्द्ध सरकारी प्रकाशन - अर्द्ध सरकारी संस्थाएँ जैसे नगर निगम, नगरपालिका, जिला परिषद तथा ग्राम पंचायतें आदि भी समय-समय पर जन्ममरण, स्वास्थ्य शिक्षा से सम्बन्धित रिपोर्ट प्रकाशित करती रहती हैं ।

(4) आयोगों व समितियों के प्रतिवेदन - सरकार द्वारा समय-समय पर नियुक्त किये गये आयोगों व समितियों की रिपोर्टों का भी प्रकाशन किया जाता है जैसे वित्त आयोग, एकाधिकार आयोग की रिपोर्ट आदि ।

(5) व्यापारिक संस्थाओं व परिषदों के प्रकाशन - अनेक व्यापारिक संस्थाएँ व परिषदें जैसे हिंदुस्तान लीवर लि., भारतीय वाणिज्य आयोग संघ, श्रम संघ, भारतीय सांख्यिकी संस्थान (आई॰एस॰आई) इत्यादि अपने सांख्यिकी व शोध विभागों द्वारा एकत्रित समक प्रकाशित करती रहती है ।

(6) अनुसन्धान संस्थाओं के प्रकाशन - अनेक अनुसन्धान संस्थाएँ व विश्वविद्यालय अनेक विषयों पर समंक एकत्रित व प्रकाशित करते है । जैसे- भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, आर्थिक विकास की शोध संस्था एवं राष्ट्रीय प्रतिदर्श जांच संगठन आदि ।

(7) पत्र पत्रिकाएँ - समाचार पत्र तथा सामाजिक पत्रिकाएँ जैसे The Economic Times, The Financial Express, The Charted Accountant में प्रकाशित सामाग्री का द्वितीयक समंको के रूप में उपयोग होता है ।

(8) व्यतिगत अनुसन्धानकर्त्ता - अनेक व्यक्ति भी विभिन्न विषयों पर किये गये शोध कार्य को सार्वजनिक उपयोग के लिए प्रकाशित करवा देते है।

2.5.2 अप्रकाशित स्त्रोत - कुछ शोध सामग्री ऐसी भी होती है जिसका विधिवत् प्रकाशन, नही होता है । अधिकतर अप्रकाशित सामग्री व्यापारिक संघों के सदस्यों या व्यक्तियों द्वारा निजी उपयोग के लिए ही होती है । अत: अप्रकाशित रूप से भी द्वितीयक समंक उपलब्ध होते हैं ।

2.6 योग संक्रिया

सांख्यिकी के अंतर्गत अनेक प्रकार के संकेतों एवम चिन्हों का प्रयोग किया जाता है। इन चिन्हों एवम संकेतो का आशय ठीक प्रकार से समझा जाना आवश्यक है । बिना इन चिन्हों एवं संकेतों के समझे सांख्यिकी के विषय कों ठीक से नहीं समझा जा सकता है ।

+,-,×,÷तथा ✓ आदि चिन्हों का प्रयोग बहुत प्रचलन में है । इन्हें चिन्ह संक्रिया कहा जाता है । सामान्य रूप से अवधारणाओं एवं विवरणों के विभिन्न समुच्चयों को व्यक्त करने के लिए x, y, z आदि चिन्हों का प्रयोग! किया जा सकता है । विभिन्न व्यक्तियों की मासिक आय को x तथा व्यय को y के द्वारा दर्शाया जा सकता है । यदि पांच व्यक्तियों की मासिक आय क्रमश: 2500, 2700, 3000, 3100 एवं 3500 रू. है तो इसे x के रूप में क्रमश: $x_1, x_2, x_3, x_4,$ तथा x_5 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

चिन्हों एवं संकेतों के इसी क्रम में निरन्तर योग के लिए जो चिन्ह प्रयोग में लाया जाता है उसे (सिगमा) कहा जाता है । यह एक ग्रीक शब्द है । $x_1, x_2, x_3, x_4,$ तथा x_5 के योग को $\sum_{i=1}^{5} X_1$ के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है । जिसका आशय यह है कि x के x_1 से x_5 तक सभी मूल्यों का योग । इसमें योग चिन्ह के नीचे प्रथम तथा योग चिन्ह के ऊपर अन्तिम संख्या लिखी जाती है । इसी को योग की सीमाएँ कहा जाता है ।

2.7 योग संक्रिया के नियम

योग संक्रिया से संबंधित नियमों को निम्न प्रकार से समझाया जा सकता है-

नियम 1

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$$

उदाहरण : यदि 6 व्यक्तियों की प्रतिदिन आय क्रमश: 200 ,250 ,275, 300, 325, 350 रू. हो तो सभी व्यक्तियों की कुल आय ज्ञात कीजिए ।

$$X_1 = 200, x_2 = 250, x_3 = 275, x_4 = 300, x_5 = 325, x_6 = 350$$

यदि i का मान 1 से 6 तक मानें तथा $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ व $+x_6$ के मान क्रमश: $200,\ 250, 275,\ 300, 325$ तथा 375 रू. मानें तो $\sum_{i=1}^{6} x_i$ का मान इन छ: के योग के बराबर होगा ।

$$\sum_{i=1}^{6} x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$= 200 + 250 + 275 + 300 + 325 + 350 = 1700 \text{ रू.}$$

नियम 2

यदि किसी स्थिरांक C को n बार तक जोड़ा जाए तो उसका मान n को c से गुणा करने पर प्राप्त मान के बराबर होगा अर्थात्

$$\sum_{i=1}^{n} C = nC$$

सत्यापन

$\sum_{i=1}^{n}$ C= C+ C+ C+ C............(n बार)

= C{1+1+1+1+ .... (n बार)}

= cxn= $_n$c

उदाहरण : किसी कक्षा के 10 विद्यार्थियों में से प्रत्येक का भार 50 किलोग्राम है । सभी विद्यार्थियों का कुल भार ज्ञात कीजिए ।

हल:

विद्यार्थियों का क्रम 1 से 10 अर्थात n=10, c=50 किलोग्राम

C = 50+50+50+50+50+50+50+50+50+50=500 or

=10×50= 500 किलोग्राम

नियम 3

यदि किसी स्थिरांक C को प्रत्येक चर संख्या X में जोड़ा जाए तो

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_1+C\right)=\sum_{i=1}^{n}x_1+nC$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_1-C\right)=\left(x_1-C\right)+\left(x_2-C\right)+\left(x_3-C\right)+........+\left(x_n-c\right)$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3..........x_n\right)-(c+c+c+..........n \text{ बार})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i-nC \quad \text{(नियम 1 तथा नियम 2 से)}$$

उदाहरण :किसी कार्यालय के चार कर्मचारियों को 1000 रूपये, 2000 रूपये, 3000 रूपये तथा 4000 रूपये वेतन मिलता है । दीपावली के अवसर पर प्रत्येक कर्मचारी को 500 रूपये बोनस दिया गया । चारों कर्मचारी कुल कितनी राशि प्राप्त करेंगे ।

हल : वेतन $X_1=1000,\ X_2=2000,\ X_3=3000,\ X_4=4000$

बोनस $C=500$ रूपये

$$\sum_{I=1}^{4}(x_i+c)=\left(1000+500\right)+\left(2000+500\right)+\left(3000+500\right)+\left(4000+500\right)=$$

$$1000+2000+3000+4000+4x500=10,000+2000=12,000$$ रु.

नियम 4

नियम यदि किसी स्थिरांक C को प्रत्येक चर संख्या X में से घटाया जाए तो -

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - C\right) = \sum_{i=1}^{n} x_1 - nC$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - C\right) = \left(X_1 - C\right) + \left(X_2 - C\right) + \left(X_3 - C\right) + ...+\left(x_n - C\right)$$

$$= \left(x_1 + x_2 + x_3 ....x_n\right) - (c + c + c + ...n \text{ बार})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_1 - nC \quad \text{(नियम 1 व नियम 2 से)}$$

नियम 5

यदि x_1 में i का मान 1 से n तक हो तथा प्रत्येक संख्या का गुणा एक स्थिरांक C से किया जाए तो-

$$\sum_{i=1}^{n} Cx_1 = C\sum_{i=1}^{n} x_1$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n} Cx_1 = Cx_1 + Cx_2 + Cx_3 + ...Cx_n$$

Or

$$= C\left(x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n\right) = C\sum_{i=1}^{n} x_1$$

नियम 6

यदि प्रत्येक चर संख्या में एक स्थिरांक C का भाग दिया जाए तो उसका मान चारों के योग में C का भाग देने पर प्राप्त मान के बराबर होगा । अर्थात्

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_1}{C} = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} X_1$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{c} = \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \frac{x_3}{c} + \frac{x_4}{c} + ...\frac{x_n}{c}\ or = \frac{1}{c}\left(x_1 + x_2 | x_3 + ...x_n\right)$$

$$= \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(नियम 1 से)}$$

नियम 7

यदि Y चर मूल्य को X चर मूल्य में जोड़ दिया जाए तो

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_1 + \sum_{i=1}^{n} y_1$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + y_i\right) = \left(x_1 + y_1\right) + \left(x_2 + y_2\right) + \left(x_3 + y_3\right) + ...\left(x_n + y_n\right)$$

$$= (x_1 + x_2 x_3 + ...x_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + ...y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$ (नियम 1 से)

नियम 8

यदि Y चर मूल्यों को X चर मूल्यों में से घटाया जाए -

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = (x_i - y_i) + (x_2 - y_2) + ...(x_n - y_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + ...x_n) - (y_1 + y_2 + ...y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i$$ (नियम 1 से)

नियम 9

यदि चर राशियाँ दो या दो से अधिक, उदाहरणार्थ, तीन है तो उनके योग के लिए दो चरों के संबंध में पूर्व वर्णित नियम का विस्तार निम्न प्रकार किया जाएगा। -

$$\sum_{i=1}^{n} (X_1 + Y_1 + Z_1) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

सत्यापन

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i + z_i) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + ...(x_n + y_n + z_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + ...x_n) + (y_1 + y_2 + ...y_n) + (z_1 + z_2 + ...z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$ (नियम 1 से)

नियम 10

यदि चर संख्याओं के वर्गो का योग करना हो तो -

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

नियम 11

यदि X चर राशियों तथा Y चर राशियों के गुणनफल का योग ज्ञात करना हो तो-

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 y_1 = x_1 y_1 + x_3 y_3 + ...x_n y_n$$

2.8 सारांश

समंकों का संग्रहण किसी सांख्यिकीय अनुसन्धान की वास्तविक प्रक्रिया का प्रथम चरण है । समंको के संग्रहण से तात्पर्य अनुसंधान सम्बन्धी आवश्यक सामग्री को उद्देश्य के अनुसार

उपलब्ध करने से है । समंक दो प्रकार के होते है प्राथमिक समंक एवं द्वितीयक समंक। अनुसंधानकर्ता द्वारा मौलिक रूप से प्रथम बार एकत्रित किये गये समंक प्राथमिक समंक कहलाते हैं । यदि समंक पहले एकत्र किए जा चुके है एवं उन्हीं समंकों का प्रयोग अनुसंधान हेतु किया जाता है तो ऐसे समंक द्वितीयक समंक कहलाते हैं ।

प्राथमिक समंकों के संग्रहण हेतु परिस्थितिनुसार हम पाँच रीतियों में से किसी भी एक रीति का चुनाव कर सकते है । ये पाँच रीतियाँ हैं- (1) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (2) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (3) स्थानीय स्त्रोतों या सम्वाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति (4) सूचकों से प्रश्नावली भरवाकर (5) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरना । द्वितीयक समंकों का संकलन प्रकाशित स्त्रोतों (यथा अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन, सरकारी व अर्द्ध सरकारी प्रकाशन, आयोगों समितियों या व्यापारिक संस्थाओं के प्रकाशन, अनुसन्धान संस्थाओं के प्रकाशन एवं पत्र पत्रिकाएँ) अथवा अप्रकाशित स्त्रोतों से किया जा सकता है ।

सांख्यिकी में 'निरन्तर योग' को दर्शाने के लिए जो चिन्ह प्रयोग में लाया जाता है उसे $\sum$ (सिगमा) कहते है । सांख्यिकी में सिगमा का उपयोग करने की क्रिया ही योग संक्रिया कहलाती है । योग संक्रिया से सम्बन्धित कुल ग्यारह नियम है । जो सांख्यिकीय समस्याओं के निर्वचन में अत्यन्त उपयोगी है ।

2.9 स्वपरख प्रश्न

1. समंकों के संग्रहण से क्या आशय है? समंकों के संग्रहण की विभिन्न रीतियाँ कौनसी है? कौनसी रीति कब उपयुक्त रहती है?
2. प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों में अन्तर स्पष्ट कीजिये। प्राथमिक समंक संग्रह करने की विभिन्न रीतियों को समझाइये और उनके सापेक्ष गुण तथा दोष बताइये।
3. द्वितीयक समंकों को परिभाषित कीजिए और उनके संग्रहण के विभिन्न स्त्रोतों का उल्लेख कीजिये।
4. सांख्यिकीय सामग्री के संकलन में सामान्य: प्रयुक्त की जाने वाली रीतियों को वर्गीकृत कीजिए और उनके लाभ दोषों का संक्षिप्त वर्णन कीजिये ।
5. योग संक्रिया से क्या आशय है? योग संक्रिया के विभिन्न नियमों को समझाइये।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

कैलाश नाथ नागर : सांख्यिकी के मूल तत्व (मेरठ : मीनाक्षी प्रकाशन) अध्याय 4

एसपी. सिंह : सांख्यिकी के मूल तत्व (नई दिल्ली एस. चन्द एण्ड क0 लि0) अध्याय 4

यादव. जैन, मित्तल : व्यावसायिक सांख्यिकी (जयपुर-दिल्ली: मलिक एण्ड कम्पनी) अध्याय -6

इकाई-3

एक चरीय समंकों का विश्लेषण - आवृत्ति वितरण का अर्थ तथा आवृत्ति वितरणों का सृजन

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

3.1 प्रस्तावना

3.2 गुण समंक

3.3 चर समंक

3.4 अविच्छिन्न चर

3.5 सतत चर

3.6 सांख्यिकी श्रेणियाँ

3.6.1 व्यक्तिगत श्रेणी

3.6.2 खण्डित श्रेणी

3.6.3 सतत् श्रेणी

3.7 सतत् श्रेणी में वर्गान्तर का निर्धारण

3.8 एकचरीय तथा द्विचर आवृत्ति वितरण

3.9 आवृत्ति वितरण का बिन्दुरेखिया प्रदर्शन

3.10 स्वपरख प्रश्न

3.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- आवृत्ति वितरण का अर्थ बतला सकें ।
- सांख्यिकीय श्रेणियों के प्रकार समझा सकें ।
- सतत् श्रेणी में वर्गान्तर निर्धारित कर सकें ।
- आवृत्ति वितरण का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन व्यक्त कर सकें ।
- आवृत्ति बहुभुज तैयार कर सकें ।

3.1 प्रस्तावना

सांख्यिकीय प्रक्रिया में समंकों के संग्रहण के बाद उन्हें यथोचित रूप से वर्गीकृत किया जाता है। वर्गीकरण के दौरान समंकों की प्रकृति को ध्यान में रखकर उन्हें आवृत्ति वितरण के रूप में व्यक्त किया जाता है । आवृत्ति वितरण वास्तविक या सैद्धान्तिक दोनों ही हो सकते हैं । सैद्धान्तिक आवृति वितरणों का अध्ययन हम सम्भावना सिद्धान्त के साथ करते हैं । यहां हम वास्तविक आवृत्ति वितरणों का अध्ययन करेंगे । संग्रहित समंक "गुण" या "चर" के रूप में हो सकते हैं ।

3.2 गुण समक

जब समंक को समय अथवा आकार के रूप में वर्गीकृत करना सम्भव न हो, तो इस प्रकार के समंक को गुण समंक कहा जाता है । जैसे सुन्दरता, ईमानदारी, होशियारी तथा बहादुरी आदि । इस प्रकार के समंक को हम गणना के दौरान ही इनकी "उपस्थित" अथवा "अनुपस्थिति" के आधार संख्यात्मक स्वरूप प्रदान कर सकते हैं ।

3.3 चर समंक

जब समंकों को प्रकृति के अनुसार उन्हें समय या आकार के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है तो उन्हें चर समंक कहा जाता है । जैसे ऊंचाई, भार आदि । चरों को उनकी प्रकृति के अनुसार पुन: दो भागों में वर्गीकृत किया जा सकता है ।

3.4 अविच्छिन्न चर

जब चर मूल्यों में अविरामता का अभाव होता है अर्थात् वितरण में निश्चित ब्रेक होता है तो उसे अविच्छिन्न चर कहा जाता है । जैसे प्रति परिवार बच्चों की संख्या - 1 बच्चा, 2 बच्चा, 3 बच्चा आदि न कि 2.5 बच्चे । इसी प्रकार प्रति प्लाण्ट फूलों की संख्या अर्थात् 1 फूल वाले प्लाण्ट्स की संख्या 2 फूल, 3 फूल तथा 4 फूल वाले प्लाण्ट्स की संख्या आदि ।

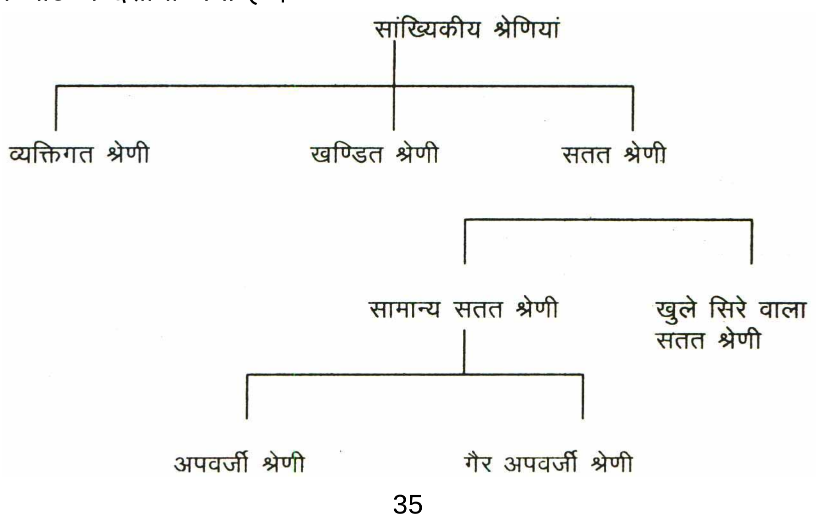
3.5 सतत् चर

सतत चर मूल्यों से आशय उन चरों से है जिनमें कोई रूकावट अर्थात् ब्रेक नहीं होता वरन् निरन्तरता रहती । प्राय: इनको किसी संख्या के फ्रेक्शन तक भी मापा जा सकता है जैसे लम्बाई, चौड़ाई, ऊंचाई तथा भार आदि ।

समंक चाहे चर के रूप में हो अथवा गुण के रूप में, सांख्यिकीय विश्लेषण के लिये यह आवश्यक होता है कि उन्हें व्यवस्थित रूप श्रेणीबद्ध एवं सारणीयन किया जाए ।

3.6 सांख्यिकीय श्रेणियां

सांख्यिकीय विषय के अन्तर्गत चरों के लिये प्राय: तीन प्रकार की श्रेणियों प्रयुक्त होती है जिन्हें निम्न चार्ट में दर्शाया गया है ।



3.6.1 व्यक्तिगत श्रेणी: व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्येक पद अपने आप में स्वतंत्र होता है। इसकी न तो कोई आवृत्ति होती है और न ही वर्ग । उदाहरणार्थ A, B, C, D तथा द्वारा परीक्षा में अर्जित अंकों की श्रेणी एक व्यक्तिगत श्रेणी होगी। ठीक इसी प्रकार काल श्रेणियां तथा स्थान श्रेणियां इसी वर्ग की श्रेणियां होती है । निम्न उदाहरण व्यक्तिगत श्रेणी के स्वरूप हैं ।

(i)

Examinee	A	B	C	D	E
Marks (out of 100)	40	60	80	90	30

(ii)

Year	2002	2003	2004	2005	2006
Production of sugar in tones	200	300	100	500	1000

(iii)

States	Raj.	Gujarat	UP	MP	Haryana
Per capita income in Rs. (P.A.)	400	600	300	250	450

3.6.2 खण्डित श्रेणी: खण्डित श्रेणी में चर मूल्यों एक निश्चित अंतर के साथ रखा जाता है तथा प्रत्येक चर मूल्य की आवृत्ति होती है । निम्नलिखित उदाहरण खण्डित श्रेणी के विभिन्न स्वरूप हैं ।

(i)

एक पौधें पर फूलों कि संख्या	0	1	2	3	4	5	6
पौधों की संख्या	10	20	30	10	5	4	2

(ii)

एक परिवार में बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	10	20	8	3	2	1	2

(iii)

पुस्तक के एक पृष्ठ पर गलतियों की संख्या	0	1	2	3	4	5
पृष्ठों कि संख्या	20	10	7	3	2	1

(iv)

जूतों का आकार	3	4	5	6	7	8
एक दिन में बेचे गये जूतों की संख्या	10	20	30	4	6	2

3.6.3 सतत श्रेणी : इस प्रकार की श्रेणी का प्रमुख लक्षण इसकी अविरामता होती है । इस श्रेणी में चर मूल्यों को प्राय: वर्गो में इस प्रकार रखा जाता है कि इनकी सततता टूटती नहीं है । जिन चर मूल्यों को समय या आकार में व्यापक रूप से वर्गीकृत किया जा सकता है, उन्हें इसी श्रेणी में प्रस्तुत किया जाता है । प्रत्येक वर्ग की अपनी पृथक आवृत्ति होती है । वर्ग की प्रथम सीमा (Lower limit)तथा वर्ग की अन्तिम सीमा (Upper limit) को क्रमश: L_1 तथा L_2 कहा जाता है । प्राय: अधिकांश सांख्यिकीय गणनाओं को इन दोनों का औसत ज्ञात करके मध्य मूल्य (Mid value) निर्धारित किया जाता है । [सूत्रानुसार $\frac{L_1 + L_2}{2} =$ मध्य मूल्य (Mid value) इस प्रकार की श्रेणी के कुछ उदाहरण निम्न प्रकार है

(i)

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों कि संख्या	4	6	8	6	2

(ii)

लम्बाई (इंचों मे)	64-66”	66-68”	68-70”	70-72”
कैडेट्स कि सांख्य	100	200	400	5

(iii)

भार (पौण्ड में)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
शिशुओं की संख्या	1	7	10	2	1

सतत श्रेणी अपवर्जी (Exclusive) अथवा समावेशी (Inclusive) प्रकृति की हो सकती है।

अपवर्जी श्रेणी

इस प्रकार की श्रेणी में पहले वर्ग की ऊपरी सीमा (Upper limit) अगले वर्ग की निचली सीमा (Lower limit) के बराबर होती है । प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा के माप की आवृत्ति को प्रथम वर्ग में सम्मिलित नहीं किया जाता वरन् उसे तुरन्त बाद के वर्ग में शामिल किया जाता है । उदाहरणार्थ प्रथम 0-10 तथा दूसरा वर्ग 10-20 है तो 10 के मूल्य की आवृत्ति को दूसरे वर्ग अर्थात् 10-20 में ही रखा जायेगा । इस प्रकार की श्रेणी का स्वरूप निम्न प्रकार होगा ।

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Y	3	7	10	7	3

समावेशी श्रेणी

सतत श्रेणी के इस स्वरूप में पहले वर्ग की निचली सीमा तथा अगले वर्ग की ऊपरी सीमा बराबर नहीं होती है । प्रत्येक वर्ग की निचली सीमा (Lower limit) के चर मूल्य के माप की आवृत्ति को उसी वर्ग में शामिल किया जाता है अर्थात् अपवर्जी श्रेणी की भांति अगले वर्ग के लिये नहीं छोड़ा जाता । इस प्रकार की श्रेणी का एक स्वरूप निम्न प्रकार है

X	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
Y	3	7	10	7	3

खुले सिर की सतत श्रेणी

जब सम्पूर्ण वितरण की चर मूल्य के सम्बन्ध में प्रथम या अन्तिम वर्ग की समस्त आवृत्तियों की गणना स्पष्ट नहीं होती है तो प्राय: इस प्रकार की खुले सिरे की श्रेणी का सृजन किया जाता है । इसे निम्नलिखित उदाहरण में दर्शाया गया है :

X	Below 10	10-20	20-30	30-40	40-50	Above 50
Y	4	6	10	3	2	10

ये श्रेणी समावेशी या अपवर्जी किसी भी प्रकार की हो सकती है ।

अन्य स्वरूप

(i) असमान वर्ग की श्रेणी : कभी- कभी सतत श्रेणी में सम्मिलित वर्ग समान अन्तराल के न होकर अलग- अलग वर्गान्तर के होते हैं । कुछ सांख्यिकीय गणनाओं को आरम्भ करने से पूर्व इन्हें प्राय: समायोजित भी किया जाता है ।

X	0-5	5-10	10-20	20-30	30-50
y	4	6	8	9	10

(ii) संचयी सतत आवृत्ति : इस प्रकार की श्रेणी में आवृत्तियों को संचयी योग में परिणत कर दर्शाया जाता है । अधिकांश सांख्यिकीय गणनाओं से पहले इस प्रकार की श्रेणी को सरलीकृत किया जाता है । इस प्रकार के आवृत्ति वितरणों के कुछ उदाहरण निम्न प्रकार है :

Given		Simplified	
Profit (in 000 Rs.)	No. of firms	Profit (in 000 R.s)	No. of firms
Less than 10	3	0-10	3
Less than 20	10	10-20	7(10-3)
Less than 30	18	20-30	8(18-10)
Less than 40	25	30-40	7(25-18)
Less than 50	30	40-50	5(30-25)

Given		Simplified	
Wages per day (Rs.)	No. of workers	Wages per day (Rs.)	No. of workers
More than 0	100	0-10	20(100-80)
More than 10	80	10-20	15(80-65)
More than 20	65	20-30	25(65-40)
More than 30	40	30-40	18(40-22)
More than 40	22	40-50	12(22-10)
More than 50	10	50-60	10

Given		Simplified	
Marks	No. of students	Marks	No. of students
0-5	3	0-5	3
1-10	10	5-10	7(10-3)
0-15	20	10-15	10(20-10)
0-20	35	15-20	15(35-20)
0-25	40	20-25	5(40-35)
			N=40

(iii) मिश्रित श्रेणी : इस प्रकार की श्रेणी में प्राय: वर्गो व आवृत्तियों को इस प्रकार समाविष्ट किया जाता है कि उन्हें विवेक पूर्ण सरलीकृत करना होता है ।

उदाहरण : 1

निम्न आवृत्ति वितरण को सरल कीजिये :

Class	0-10	10-20	Up to 30	30-40	30-50	50-60	Above 60	60-70	70-80
Frequency	10	15	27	20	45	10	30	12	8

हल :

यहां समायोजित एवं सरलीकृत आवृत्ति विवरण निम्न प्रकार होगा :-

Class	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
Frequency	2	10	15	20	25	10	12	8	10

उदाहरण : 2

निम्नलिखित व्यक्तिगत अवलोकन एक निगम के कर्मचारियों के निवास कैम्पस में 40 परिवारों द्वारा गृह कार्य में प्रयुक्त अप्लांसेज की संख्या से सम्बन्धित है ।

3	7	11	5	3	2	6	5
4	5	6	7	8	10	9	8
4	2	3	2	5	7	11	4
5	9	8	7	6	4	5	3
10	8	4	5	3	2	1	5

Develop (i) Discrete series

(ii) Continuous series

(a) Inclusive (b) Exclusive

खण्डित श्रेणी

No. of house hold appliance	Tally Bar	Frequency
1	I	1
2	~~IIII~~	4
3	~~IIII~~	5
4	III	5
5	~~IIII~~ III	8
6	III	3
7	IIII	4
8	IIII	4
9	II	2
10	II	2
11	II	2
		40

सतत श्रेणी (अपवर्जी)

X	Tally Bar	Frequency
0-2	I	1
2-4	~~IIII~~ III	9
4-6	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
6-8	~~IIII~~ II	7
8-10	~~IIII~~ I	6
10-12	III	4
		40

सतत श्रेणी (समावेशी)

X	Tally Bar	Frequency
0-2	~~IIII~~	5
3-5	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
6-8	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
9-11	~~IIII~~ I	6

3.7 सतत श्रेणी में वर्गान्तर का निर्धारण

जब संग्रहित समंकों से सतत आवृत्ति वितरण का सृजन किया जाता है तो अनुसंधानकर्ता के सामने एक प्रश्न यह उठता है कि कुल कितने वर्गों का सृजन किया जाए एवं

वर्गान्तर कितना हो । इस सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम नहीं है तथा अनुसंधानकर्ता को अपने विवेक से ही निर्णय लेना होता है । प्राय: यह ध्यान रखा जाता है कि वर्गो की संख्या न तो बहुत अधिक हो और न ही बहुत कम । इस संदर्भ में प्रो. एच.ए. स्टर्जस का नियम महत्त्वपूर्ण है ।

स्टर्जस का नियम : स्टर्जस ने वर्गान्तर के निर्धारण के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रतिपादन किया है।

$$i = \frac{L-S}{1+3.322 \text{ Log N}}$$

जहाँ

i = वर्गान्तर L= अधिकतम मूल्य S= न्यूनतम मूल्य

N= पदों की संख्या

चूंकि स्टर्जस के अनुसार 1 + 3.322 Log N=n होता है अत: $i = \frac{L-S}{n}$ का ही मूल सूत्र बन जाता हैं।

उदाहरण : 3

स्टर्जस के नियम का प्रयोग करते हुए 50 कर्मचारियों द्वारा किये गये घण्टों के आधार पर निम्न समंकों को एक माह के लिये समान वर्गी वर्गीकृत कीजिये :

110	165	113	42	149	175	133	69	30	104
161	195	101	62	187	157	151	93	138	184
155	141	143	156	197	108	103	140	167	87
164	150	1-4	124	40	128	162	71	164	122
114	149	94	146	203	178	79	87	116	148

(C.A. Nov., 1962)

हल :

वर्गान्तरों की संख्याएं

n = 1+3.322 Log N or = 1+3.322 Log 50

= 1 +3.22 x 1.699= 1+ 5.644 or = 6.644 or 7 approximately

वर्गान्तर $\overline{\text{अर्थात}}$ $i = \frac{\overline{L-S}}{n} = \frac{203-3}{7}$ = 24.7 or 25 approximately

25 का वर्ग-विस्तार लेते हुए समंकों का निम्न प्रकार वर्गीकरण किया गया है । प्रथम वर्ग न्यूनतम मूल्य (30) से प्रारम्भ करना होगा ।

Hours (Class intervals)	Tally Marks	Number of workers (Frequency)
30-55	III	3
55-80	III	4
80-105	IIII I	6

105-130	IIII\ III	9
130-155	IIII\ IIII\ II	12
155-180	IIII\ IIII\ I	11
180-205	IIII\	5
Total		50

उदाहरण : 4

नीचे दिये हुए गध्यांश के प्रत्येक शब्द मे अक्षरो की गणना (विराम चिन्हो का ध्यान न रखते हुए) कीजिये तथा एक खण्डित आवर्ती वितरण की रचना कीजिये:

"By statistics we mean aggregates of facts, affected to a marked extent by multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated, according to a reasonable standard of accuracy, collected in a predetermined purpose and placed in relation to each other".

हल

X	Tally Bar	Frequency
1	III	3
2	IIII\ IIII\ II	12
3	I	1
4	II	2
5	II	2
6	IIII	4
7	I	1
8	IIII	4
9	IIII	4
10	IIII	4
11	I	1
12	I	1
13	I	1
		N = 40

उदाहरण : 5

यहां 50 श्रमिकों की मजदूरी दी हुई है । स्टर्जस नियम प्रयोग करते हुए अपवर्जी समान वर्गान्तरों में वर्गीकृत कीजिए:

3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 32, 33, 33, 34, 34, 34, 36, 39, 40, 41, 45, 46, 48, 50, 55, 57, 58, 59, 61, 63, 64, 68, 70, 72, 74, 75, 78, 80, 84, 86, 95, 100

हल

K= 1+ 3.322 log N, k = No. of classes

= 1 + 3.322 log 50 or = 1+ (3.322 x 1.6990) or = 1 + 5.644

K= 6.644 of 7 Approx.

$$i = \frac{\text{Range}}{1 + 3.322 \log N} \quad \text{or} \quad i = 15 \text{ Approx.}$$

उपर्युक्त गणनाओं को समान वर्गान्तरों में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जाएगा :

Wages	Tally bars	Number of workers
0-15	IIII I	6
15-30	IIII IIII	10
30-45	IIII IIII II	12
45-60	IIII III	8
60-75	IIII II	7
75-90	IIII	5
90-105	II	2
		Total = 50

3.8 एकचरीय तथा द्विचर आवृत्ति वितरण

अनेक बार दो चर मूल्यों के एक साथ प्रस्तुत करना होता है, जैसे किसी कक्षा में ऊंचाई एवं भार दोनों को एक ही कोष्ठ आवृत्ति में व्यक्त करना होता है । ऐसी दशा में हम द्विचर वितरण का सृजन एक सारणी में माध्यम से करते हैं । एक चर मूल्य को कॉलम्स में तथा दूसरे को पंक्तियों में प्रस्तुत किया जाता है, इस प्रकार की सारणी को द्विचर सारणी कहा जाता है । चर मूल्य खण्डित एवं सतत् दोनों प्रकार की श्रेणियों को लिया जा सकता है ।

उदाहरण : 6

निम्न समंकों से द्विचर आवृत्ति वितरण तैयार कीजिये.

Marks in Accountancy	26	28	25	26	26	24	26	25	27	24
Marks in Staistics	18	19	18	19	17	18	20	17	18	17
Marks in Accountancy	26	27	25	26	27	28	25	27	26	25
Marks in Statistics	18	19	17	19	20	20	19	19	18	17

हल:

Bi - Variate Frequency Table

Marks in Accountancy	Marks in statistics				
24	17	18	19	20	Total
25	I (1)	I (1)	-	-	02
26	III (3)	I (1)	I (1)	-	05
27	I (1)	III (3)	II (2)	I (1)	07
28	-	I (3)	II (2)	I (1)	04
Total	-	-	I (1)	I (1)	02
24	5	6	6	3	20

आवृत्ति वितरण का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन

प्राय: आवृत्ति वितरणों को निम्नलिखित विभिन्न रेखाचित्रों में व्यक्त किया जा सकता है:-

(i) रेखा आवृत्ति-चित्र (Line Frequency Duagram)

(ii) आवृत्ति आयत चित्र (Histrogram)

(iii) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

(iv) आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)

(v) संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency Curve)

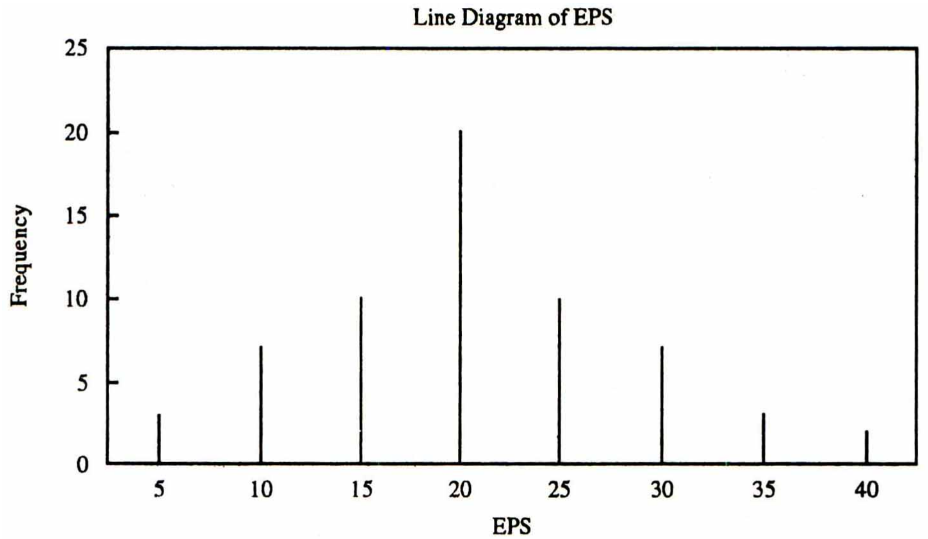
(i) रेखा आवृत्ति-चित्र(Line Frequency Diagram) : वस्तुत: आवृत्ति वितरण का यह सबसे सरल स्वरूप है, जिसके अन्तर्गत आवृत्ति के मूल्य के आधार पर सीधी रेखाएं खींची जाती हैं ।

प्राय: खण्डित आवृत्ति वितरणों को रेखा आवृत्ति चित्रों के रूप में दर्शाया जाता है :

उदाहरण : 7

निम्नलिखित समंकों से रेखा आवृत्ति चित्र तैयार कीजिये :

EPS in Rs.	5	10	15	20	25	30	35	40
Frequency	3	7	10	20	10	7	3	2

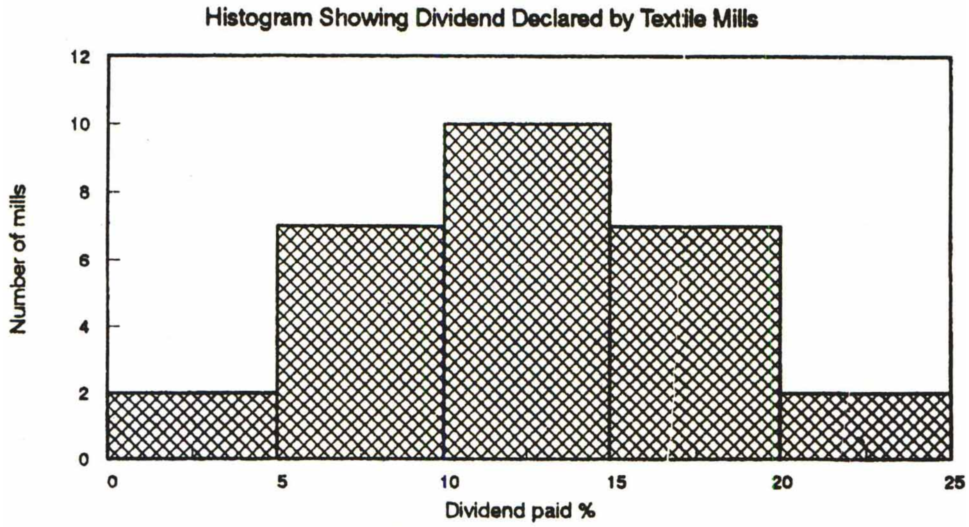


(ii) आवृत्ति आयत चित्र : प्राय: अविराम आवृत्ति वितरण का रेखा चित्रीय प्रदर्शन करने हेतु आयत चित्रों का निर्माण किया जाता है । आवृत्ति चित्रों को सोपान चित्र भी कहते हैं । प्रत्येक वर्गान्तर के लिये, आवृत्ति के अनुपात में ऊंचाई के समतुल्य आयत एक दूसरे से सटे हुए तैयार किये जाते हैं । यदि वर्गान्तर समावेशी श्रेणी में हैं तो उन्हें पहले अपवर्जी श्रेणी में बदल लेना चाहिये ।

उदाहरण: 8

निम्नलिखित समंक एक राज्य में वस्त्र मिलों द्वारा घोषित लाभांश से सम्बन्धित हैं । आयत चित्र की रचना कीजिये:

x (Dividend Paid in %)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
F (No. of Mails)	2	7	10	7	2



असमान वर्गो के आवृत्ति वितरण का आयत चित्र : यदि आवृत्ति वितरण में वर्गान्तर (X) असमान हों तो आयात चित्र बनाने से पूर्व आवृत्तियों को समान वर्गान्तर के आधार पर

समायोजित करना चाहिये । आवृत्ति समायोजन हेतु सबसे कम वर्गान्तर वाले वर्ग को आधार मानकर निम्न सूत्र द्वारा आवृत्तियों का समायोजन किया जा सकता है -

$$Adjusted\ frequency\ of\ unequal\ class = \frac{With\ or\ magnitude\ of\ basic\ class}{Width\ or\ magnitude\ of\ the\ given\ class} \times Frequency\ of\ given\ class$$

इस प्रकार की गणना को आवृत्ति घनत्व निर्धारण (Frequency density) का आकलन कहा जाता है ।

उदाहरण : 9

निम्नलिखित समंकों से आयत चित्र तैयार कीजिये :

X (ROI %)	0-4	4-8	8-16	16-24	24-36
F (No. of Companies)	5	10	40	30	18

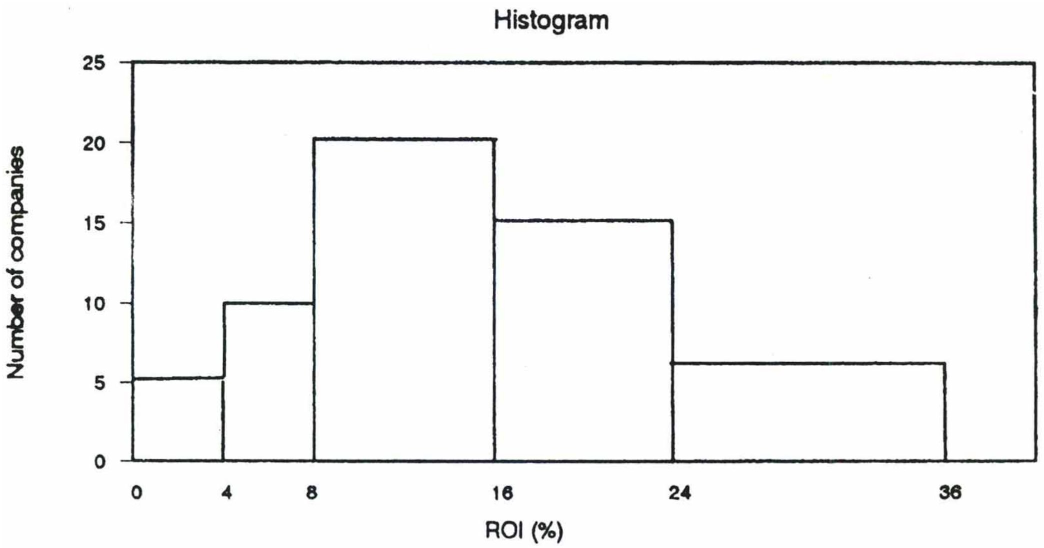
क्योंकि यहां वर्गान्तर असमान है अत: अन्तिम तीन वर्गो की आवृत्तियां निम्न प्रकार समायोजित की जायेगी:

$$8-16 \Rightarrow Adujusted\ frequency = \frac{Magnitude\ of\ basis\ class}{Magnitude\ of\ given\ class} \times Frequency\ of\ given\ class$$

For $8-16$ $\quad \frac{4}{8} \times 40 = 20$

For $16-24$ $\quad \frac{4}{8} \times 30 = 15$

For $24-36$ $\quad \frac{4}{12} \times 18 = 6$



आवृत्ति बहुभुज

वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु अथवा चर मूल्यो एवं तत्सम्बन्धी आवृत्तियों के द्वारा सृजित अनेकों भुजाओं वाले ज्योमितिय चित्र को प्राय: आवृत्ति बहुभुज कहा जाता है ।

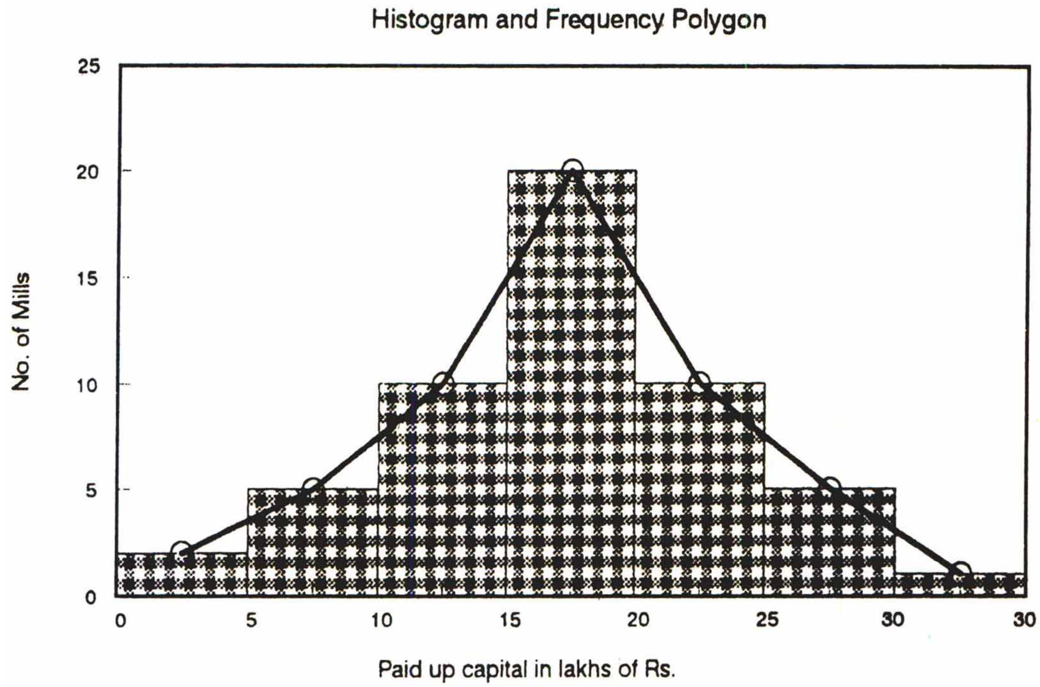
खण्डित आवृत्ति वितरण की अवस्था में चर मूल्यों को भुजाक्ष एवं आवृत्तियों की कोटि अक्ष पर लेकर उनके बिन्दु प्रांकित कर दिये जाते हैं । तदुपरान्त समस्त बिन्दुओं को आपस में मिलाते हुए, अन्तिम बिन्दुओं को आधार रेखा से जोड़कर आवृत्ति बहुभुज बनाया जा सकता है ।

सतत श्रेणी में वर्गो को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि अक्ष पर लेते हुए तत्सम्बन्धी बिन्दु प्राकित कर लिये जाते हैं तथा समस्त बिन्दुओं को मिलाते हुए प्रथम एवं अन्तिम बिन्दुओं को भी भुजाक्ष से मिला दिया जाता है । वस्तुतः सतत-श्रेणी में पहले आवृत्ति आयात चित्र बनाकर फिर आवृत्ति बहुभुज बना लेना सरल रहता है । आवृत्ति आयत चित्र तथा आवृत्ति बहुभुज का क्षेत्रफल सदैव बराबर रहता है ।

उदाहरण : 10

निम्नलिखित समंकों से आवृत्ति आयत चित्र तथा आवृत्ति बहुभुज तैयांर कीजिये :

X (paid up capital in Lakh Rs.	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
F (No. of Mills)	2	5	10	20	10	5	1



आवृत्ति वक्र

वस्तुतः आवृत्ति वक्र, आवृत्ति बहुभुज का ही सरल रूप है । यह वक्र मुक्त हस्त से इस प्रकार तैयार किया जाता है कि इसका कुल क्षेत्रफल लगभग उतना ही रहता है जितना कि आवृत्ति बहुभुज में है । इस प्रकार से बनाये गये वक्र में बहुभुज की कोणीयता को निरस्त करके एक सरल चित्र इस स्वरूप में निरूपित होता है कि वह आवृत्ति वितरण की प्रकृति को सरलता से स्पष्ट कर सके । इससे विषमता की दिशा का भी ज्ञान सरलता से हो जाता है । निम्न उदाहरण में ऋणात्मक विषमता के साथ असमयित (Asymmetrical) आवृत्ति वक्र को दर्शाया गया है :-

उदाहरण : 11

निम्नलिखित समंकों से आवृत्ति आयत चित्र तथा आवृत्ति बहुभुज तैयार कीजिये :

X (Earnings, per day):	0-10	10-20	20-30	40-50	40-50	50-60	60-70
F (No. of workers in a factory)	10	30	20	15	8	7	5

Construct:

(1) Histogram

(2) Frequency Polygon on two separate Graphs.

(a) Taking Histrogram as basis.

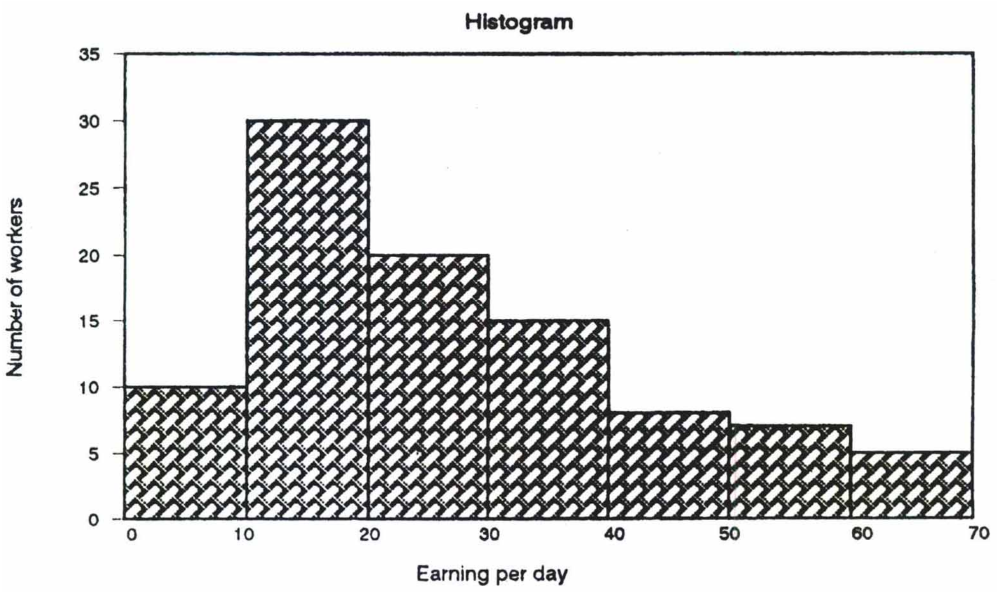
(b) By ploting middle points on a graph and

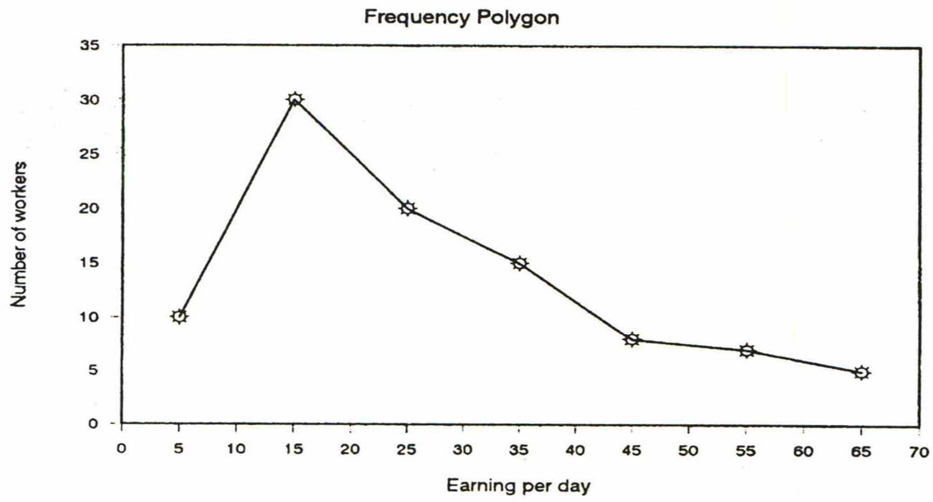
(c) frequency curve smoothing it on graph

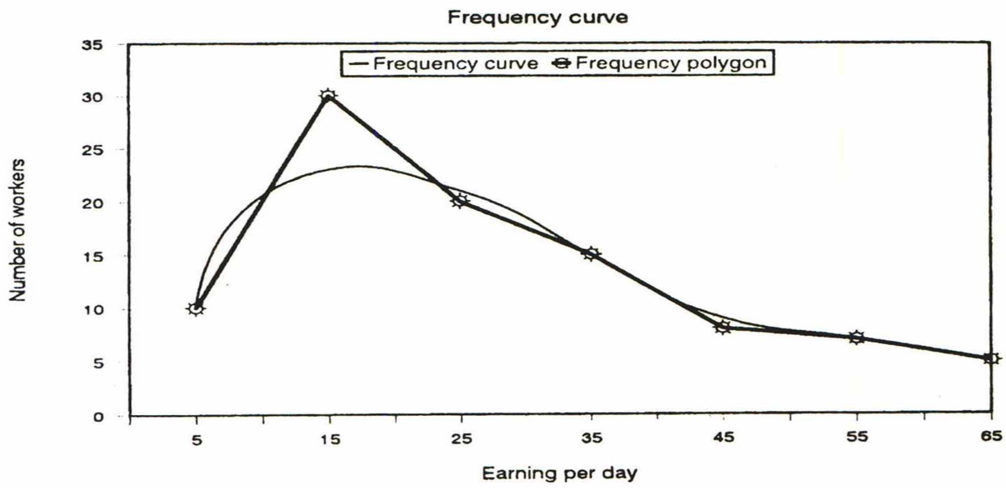
(3) All three frequency graphs i.e., Histrogram, Frequency. Polygon and frequency curve on a Singal graph.

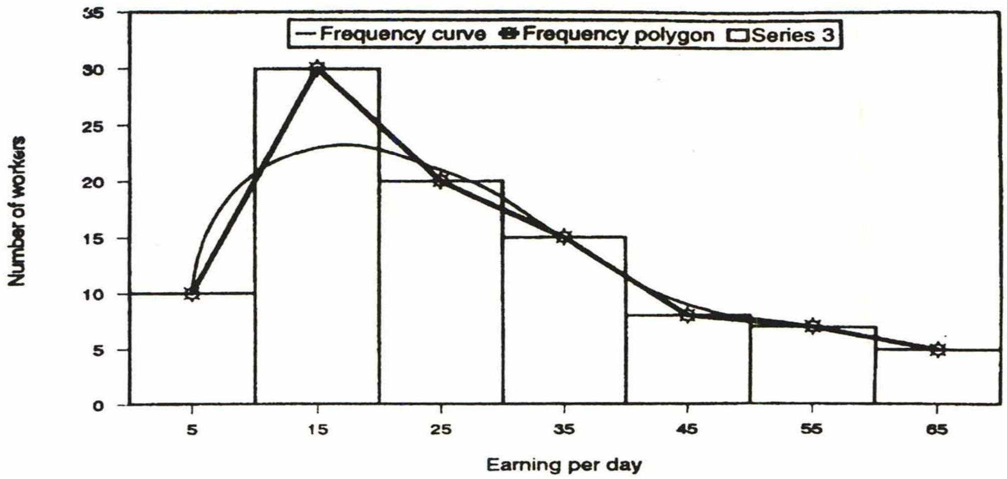
सृजित कीजिये :

1. आयात चित्र
2. दो प्रथक-प्रथक ग्राफ पात्रो पर आवर्ती बहुभुज (अ) आयत चित्र को आधार मानकर, (व) मध्य बिन्दुओं को ग्राफ पत्र पर प्राकित करके, (स) उपर्युक्त ग्राफ (ब) पर सरलीकृत करते हुए आवृत्ति बनाइये ।
3. तीनों आवृत्ति रेखा चित्रों अर्थात् आवृत्ति आयत चित्र, बहुभुज एवं वक्र को एक ही रेखा चित्र पर दर्शाकर ।




Frequency Polygon
Number of workers
Earning per day

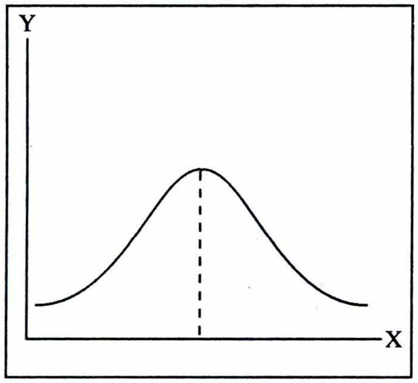

Frequency curve
Frequency curve
Frequency polygon
Number of workers
Earning per day


Frequency curve
Frequency polygon
Series 3
Number of workers
Earning per day

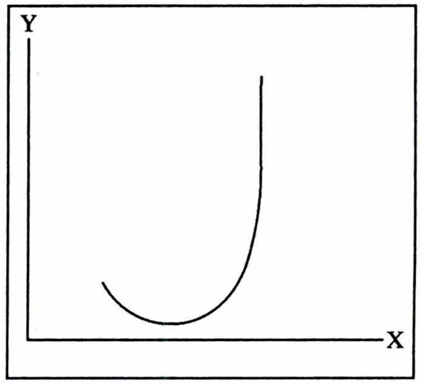
विभिन्न आवृत्ति वक्रों के प्रकार

आवृत्ति वक्र, आवृत्ति वितरण की प्रकृति को ध्यान में रखते हुए अनेकों प्रकार के हो सकते हैं । विभिन्न प्रकार के आवृत्ति वक्रों का चित्रीय प्रदर्शन निम्न प्रकार है:

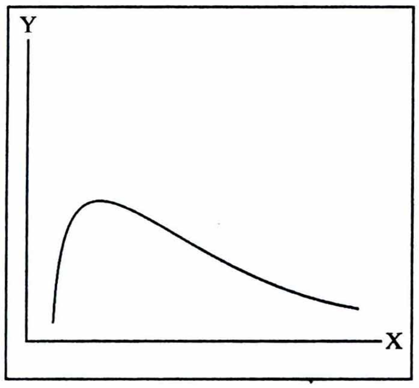
(i) सामान्य वक्र (Normal curve)



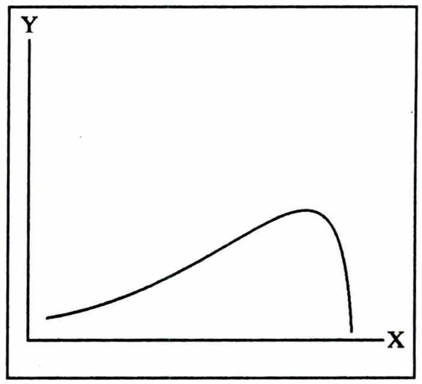
(ii) जे-आकार वक्र (J. Shaped curve)



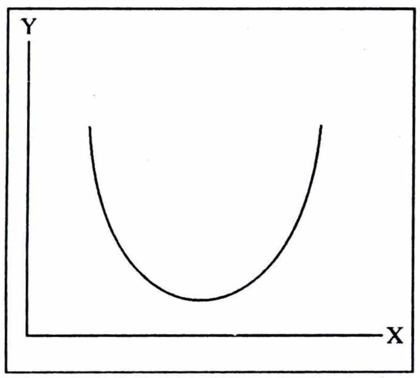
(iii) विषम वक्र (Skewed Curve)



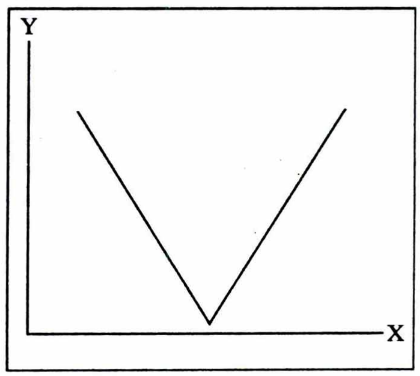
(iv) विषम वक्र (Skewed Curve)



(v) U आकार के वितरण



(vi) V आकार के वितरण



संचयी वक्र :

इस वक्र को 'ओजाइव वक्र' भी कहते हैं । इसे बनाने के लिये सरल आवृत्ति वितरण को संचयी आवृत्ति वितरण में परिवर्तित करना होता है । यह वक्र वर्गान्तरों की ऊपरी सीमा (Upaar limts) को भुजाक्ष पर तथा तत्सम्बन्धी संचयी आवृत्तियों को कोटि अक्ष पर प्रांकित करके तैयार किया जा सकता है । इसके कारण ऊपरी सीमाओं की आवृत्ति जुड़-जुड़ कर इस प्रकार संचयी होती रहती है उनसे प्राप्त वक्र धनात्मक ढाल का होगा जिसे हम ' लेस Less than ogive ' कह सकते हैं । वैकल्पिक रूप से हम 'More than ogive' भी तैयार कर सकते हैं, इसे तैयार करते समय निचली सीमाओं को भुजाक्ष पर जबकि संचयी आवृत्तियों को कोटि अक्ष पर प्रांकित किया जाता है ।

उदाहरण : 12

निम्नलिखित समंकों से - 'Less than' तथा 'More than' संचयी आवृत्ति वितरण तैयार कीजिये

X	0-10	10-20	20-30	33-40	40-50	50-60	60-70
F	10	30	20	15	8	7	5

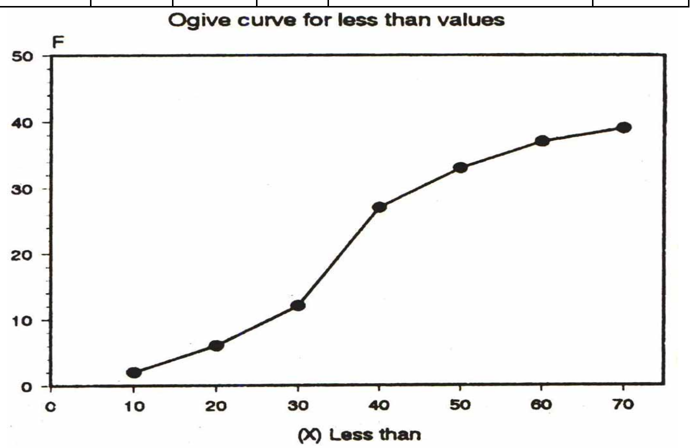
हल :

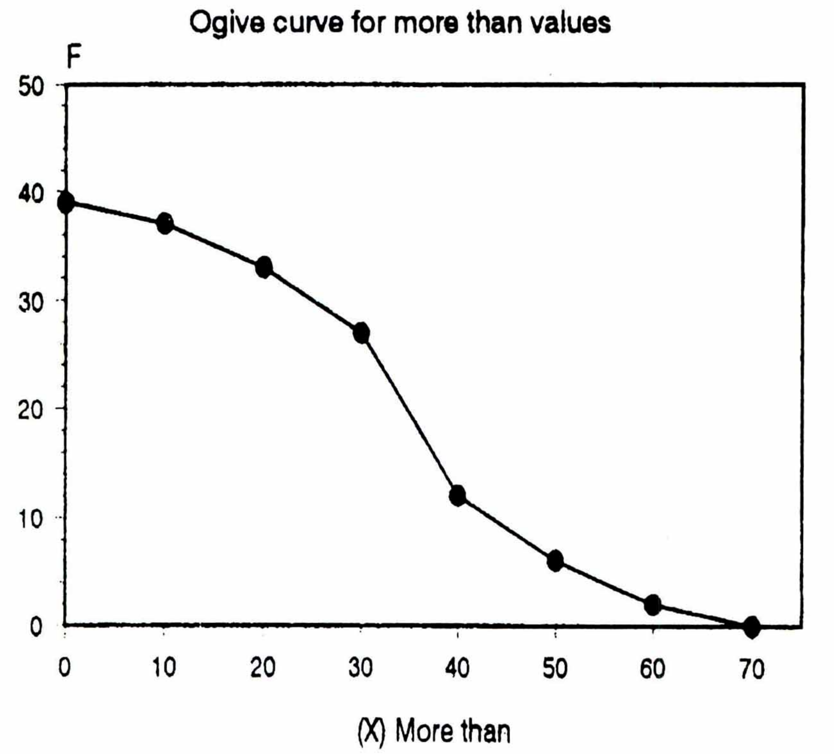
(A) Less then Ogive:

x	f	c.f.
Below 10	2	2
37Below 20	4	6
Below 30	61	12
Below 40	15	27
Below 50	6	33
Below 60	4	37
Below 70	2	39
	39	

(B) More then Ogive:

x	c.f.
More than 0	39
More than 10	37
More than 20	33
More than 30	27
More than 40	12
More than 50	6
More than 60	2
More than 70	0





3.10 स्वपरख प्रश्न

1. चर तथा गुणों में अन्तर कीजिये । अविच्छिन्न चरों को समझाइये ।
2. व्यक्तिगत श्रेणी क्या है? इससे आप सतत् श्रेणी किस प्रकार बनायेंगे ।
3. सतत् श्रेणियां क्या है? इसके इसके विभिन्न स्वरूपों को बताइए ।
4. निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणियां दीजिये :-
   (i) स्टर्जस नियम
   (ii) ओजाइव वक्र
   (iii) अपवर्जी श्रेणी
   (iv) आवृत्ति घनत्व
   (v) खुले सिरे की श्रेणियां
5. एक कक्षा में 24 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न प्रकार है, खण्डित आवृत्ति बंटन की रचना कीजिये
6. निम्नलिखित श्रेणी को समान में पुनर्गठित कीजिए और उसके बाद 'से कम' तथा 'से अधिक' संचयी वितरण में रचना कीजिए ।

0-5	3
5-6	2
6-9	7

9-12	5
12-14	16
18-20	15
20-24	20
24-25	8
25-30	10
30-36	2

7. निम्न समंको से 20-20 का वर्गान्तर रखते हुए अपवर्जी एवम समावेशी श्रेणी बनाइए तथा समावेशी श्रेणी को उपयुक्त अपवर्जी स्वरूप मे बदलिये:

195	175	16	100	121	139	128
145	125	140	155	180	125	118
177	121	159	148	165	179	135

8. एक परीक्षा मे 30 विद्यार्थी के प्राप्तांक निम्न प्रकार है। प्रत्येक वर्ग समूह मे 10-10 का अन्तराल रखते हुये अपवर्जी एवं समावेशी श्रेणी बनाइये

27	30	10	18	20	30
25	33	9	16	20	29
25	35	41	15	18	29
25	39	11	14	20	29
22	47	14	14	18	29

Ans:

Exclusive series	0-10 2	10-20 10	20-30 12	40-50 1
Inclusive series	0-9 2	10-19 10	20-29 12	40-49 1

9. निम्नलिखित श्रेणी को समान वर्गान्तर में पुनर्गठित कीजिये और उसके बाद से कम तथा से अधिक संचयी वितरण की रचना कीजिये ।

0-5 3	5-6 2	6-9 6	9-12 7	12-14 16	14-18 18	18-20 15
20-24 20	24-25 8	25-30 10	30-36 2			

10. स्टर्जस का नियम (Sturge's Rules n=1+3.3 log N) का प्रयोग करते हुए एक कारखाने के 50 कर्मचारियों के माह मे काम के घण्टों को समान वर्गीकृत कीजिए:

110,108,165,113,140,42,167,149,87,175,164,133,150,69,144,30,124,104,40,161,128,195,162,121,71,62,164,187,122,157,114,151,149,93,94,138,146,184,203,155,178,141,79,143,87,156,116,197,148

इकाई-4

केन्द्रीय प्रवृत्ति एवं अपकिरण की अवधारणा तथा मापन

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

4.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं परिभाषाएं

4.2 सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार

4.3 बहुलक

4.4 मध्यका

4.5 समानान्तर माध्य

4.6 गुणोत्तर माध्य

4.7 हरात्मक माध्य

4.8 स्वपरख प्रश्न

4.9 अपकिरण

4.10 अपकिरण के प्रकार

4.11 अपकिरण की माप

4.12 प्रमाप विचलन

4.13 अभ्यासार्थ प्रश्न

4.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन क बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि

- केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का अर्थ बतला सकेंगे ।
- विभिन्न प्रकार के माध्यम स्पष्ट कर सकेंगे ।
- बहुलक, मध्यका तथा समान्तर माध्य का परिकलन कर सकेंगे ।
- गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य की गणना कर सकें ।
- अपकिरण का अर्थ तथा माप बतला सके ।
- अपकिरण की रीतियाँ समझा सकें ।

4.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं परिभाषाएं

वस्तुतः सांख्यिकीय विश्लेषण का मूलभूत उद्देश्य समग्र के ऐसे प्रतिनिधि मूल्य का अनुमान लगाना होता है, जिसके निकट अधिकांश मूल्य एकत्र होते हैं। अत: सांख्यिकी में समंकों के संग्रहण के पश्चात् इस प्रतिनिधि अथवा औसत मूल्य का अनुमान लगाना महत्त्वपूर्ण कार्य होता है। चूंकि इस औसत या केन्द्रीय मूल्य द्वारा उपलब्ध सभी समंकों की किसी न किसी प्रवृत्ति का ज्ञान अवश्य होता है, इसलिए औसत या केन्द्रीय मूल्य के माप को केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक के नाम से जाना जाता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप को विभिन्न विद्वानों ने अपने-अपने ढंग से निम्न प्रकार परिभाषित किया है -

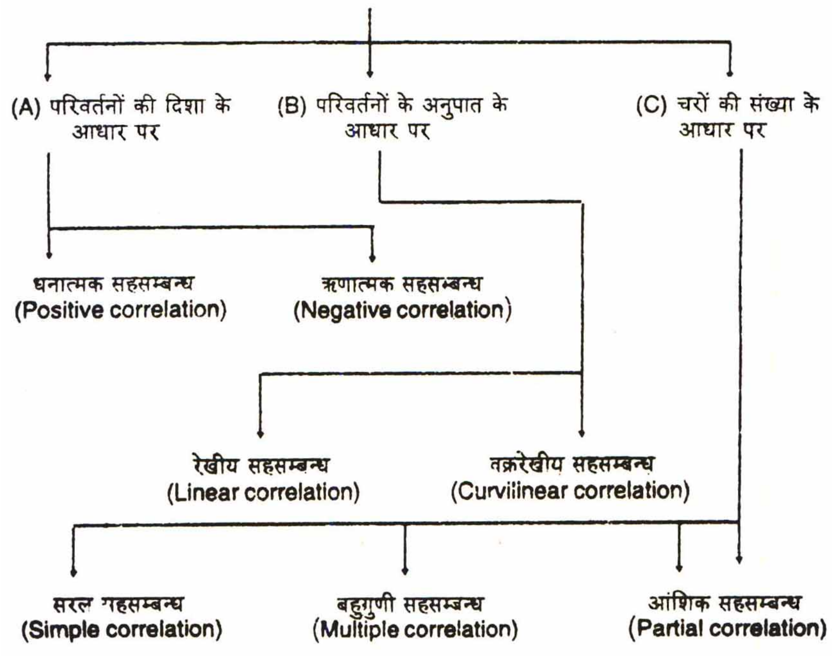
सिम्पसन एवं कापका के अनुसार - "केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप एक ऐसा विशिष्ट (Typical) मूल्य है, जिसके चारों ओर अन्य सभी समंक बिखरे होते हैं।"

क्लार्क के शब्दों में - "सम्पूर्ण समंकों का वर्णन करने के लिए एक संख्या ज्ञात करने का प्रयास ही औसत कहलाता है।"

केन्द्रीय प्रवृत्ति -सांख्यिकीय वितरणों में यह एक सामान्य विशेषतः पायी जाती है कि अधिकांश आवृत्तियां किसी विशिष्ट केन्द्र बिन्दु के आस-पास एकत्र होने की प्रवृत्ति रखती है । समंकों को इसी प्रवृत्ति को प्राय: केन्द्रीय प्रवृत्ति के नाम से जाना जाता है । किसी कक्षा में छात्रों द्वारा अर्जित अंकों के वितरण अवलोकन करें तो हमें ज्ञात होगा कि ऐसे छात्र बहुत कम होंगे जिन्होंने 100 में से 100 अंक प्राप्त किये हो अथवा 100 में से शून्य । अधिकांश छात्रों का औसत "40-50" के आस-पास पाये जाना एक सामान्य बात है । ऐसा प्रतीत होता है कि शून्य और 100 दोनों से आवृत्तियों औसत (40-50) की ओर प्रेरित रहते हैं।

4.2 सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार

सांख्यिकीय साहित्य में समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति को मापने का सतत् प्रयास किया जाता रहा है । इसके लिए प्रयुक्त विभिन्न सांख्यिकीय माध्य निम्न चार्ट में दर्शाये गये हैं -



स्थिति सम्बन्ध माध्य - इस श्रेणी की प्रमुख माप बहुलक एवं मध्यका है।

4.3 बहुलक

बहुलक से आशय उस पद मूल्य से है जो एक श्रेणी में सर्वाधिक बार घटित होता है । उदाहरणार्थ एक कारखाने में कार्य करने वाले 6 मजदूरों की दैनिक मजदूरी क्रमश: रू. 40,30,50,40,25 तथा 40 रू. है तो बहुलक मजदूरी 40 रू. होगा क्योंकि यह मूल्य सर्वाधिक बार घटित हुआ है

मजदूरी (रु.)	25	30	40	50
आवर्ती	1	1	3	1

स्पष्टतया 40 रू. की आवृत्ति सबसे अधिक है, बहुलक का मान 40 रू. होगा । यद्‌यपि आवृत्ति वितरण को देखकर हम सरलता से बहुलक का अनुमान लगा सकते हैं । किन्तु कभी-कभी आवृत्ति वितरण में बहुलक स्पष्ट नहीं होता है, अत: हमें समूह या समूहीकरण की रीति से बहुलक का अनुमान लगाना होता है । बहुलक की व्यवहारिकव गणना को निम्न प्रकार समझाया गया है :

(i) **व्यक्तिगत श्रेणी** : इस श्रेणी में बहुलक की सीधी गणना या तो आवर्ती वितरण बताकर अथवा मानों के अनुसंधानात्मक सम्बन्ध (Empirical Relationship) के द्‌वारा की जाती है । जैसा कि पिछले उदाहरण में 40 रू. की गणना की गई है ।

(ii) **खण्डित श्रेणी में** : इस श्रेणी अवलोकन अथवा समूहीकरण के माध्यम से बहुलक का अनुमान लगाया जाता है।

उदाहरण :1

X	0	1	2	3	4	5	6
f	3	7	10	40	10	7	3

स्पष्टतया अवलोकन द्‌वारा बहुलक का मूल "3' ' है क्योंकि 3 की आवृत्ति सर्वाधिक 40 है । किन्तु जब श्रेणी समित या इतनी स्पष्ट नहीं हो तो समूहकरण द्‌वारा ही बहुलक की गणना की जानी चाहिये । इस विधि के अनुसार पहले 2 के जोड़ों में, फिर एक आवृत्ति को छोड़कर 2 के जोड़े, 3 के जोड़े, एक को छोड़कर 3 के जोड़े बनाकर तथा अन्त प्रथम दो आवृत्तियों को छोड़कर 3 के जोड़े बनाकर बहुलक की गणना की जाती है ।

उदहारण : 2

निम्नलिखित समंकों से बहुलक की गणना कीजिये :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	1	18	4	10	12	15	16	10	8	7	

हल:

X o	f	I	II	III	IV	V	Tally Bars
1	1						
		19					
2	18			23			
			22				I (I)
3	4						
		12			30		
4	8						
						24	I (I)
5	12			35			
		27	21				
6	15						II (2)
7	16				43		IIII (5)
		28	31				
8	12			37			IIII (5)
						43	
9	9				29		I(i)
		17	21				
10	8						14

Hence model value (7)

सतत् श्रेणी में बहुलक की गणना : सतत् श्रेणी में बहुलक वर्ग का माना समूहीकरण विधि से ही किया जाता है । तदुपरांत बहुलक वर्ग से बहुलक का मान ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है:

$$Z = L_1 + \frac{f1 - f0}{2\,f1 - f0 - f2} \times i$$

Z = बहुलक, L_1 = बहुलक वर्ग की निचली सीमा, (i) वर्गान्तर, f_0 = बहुलक वर्ग से पहले वर्ग की आवृत्ति, f1 बहुलक समूह की आवृत्ति तथा f_2 बहुलक वर्ग से आगे वाले वर्ग की आवृत्ति है।

उदाहरण : 3

निम्नलिखित समंकों से बहुलक ज्ञात कीजिये

हल :

x	f	I	II	III	IV	V	Tally Bars	
0-10	3						I	1
		10						
10-20	7						III	3
				20				
20-30	10		17				IIII I	6
		30						
30-40	20				37	40	III	3
			30					
40-50	10			37			I	1
		17						
50-60	7							
			10					
60-70	3				2			14

स्पष्टतया बहुलक वर्ग 30-40 है । सूत्रानुसार

$$Z = L_1 + \frac{f1 + f0}{2f1 - f0 - f0}$$

$$Z = 30 + \frac{20 - 10}{2 \times 20 - 10 - 10} \times 10 = 30 + \frac{10}{20} \times 10 = 35$$

4.4 मध्यका

मध्यका से आशय एक श्रेणी मध्य मूल्य से है जबकि समंक माला को आरोही अथवा अवरोही क्रम में जमाया गया हो। विभिन्न श्रेणियों में इसकी गणना को निम्न प्रकार समझाया गया है :

व्यक्तिगत श्रेणी : इस श्रेणी में मध्यका मूल्य के आकार की गणना का सूत्र है -

$$m = \frac{N + 1}{2}$$

उदाहरण : 4

मध्यका ज्ञात कीजिये :

S.NO.	X
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8
6	10
7	12

$m = \frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2}$

= Value of 4th item

= 6

हल:

यदि इसी श्रेणी एक पद मूल्य 2 और होता तो मध्यका का मान $\frac{8+1}{2}$ = 4.5 अर्थात् $\frac{6+8}{2}$ = 7 होता है ।

खण्डित श्रेणी : इस श्रेणी में मध्यका का मान इग्नत करने के लिये आवृत्ति को संचयी आवृत्ति में बदल कर $\frac{N+1}{2}$ के सूत्र से मध्यका मूल्य का आकलन किया जाता है ।

उदाहरण : 5

समंकों से मध्यका का आकलन कीजिये

x	0	2	4	6	8	10	12
f	3	8	9	20	9	8	3

हल:

x	0	2	4	6	8	10	12
f	3	8	9	20	9	8	3
cf	3	11	20	40	49	57	60

M = $\frac{N+1}{2} = \frac{60+1}{2} = 30.5$ Hence median is 6

सतत श्रेणी : सतत श्रेणी में मध्यका की गणना के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है । इसके पूर्व संचयी आवर्ती के माध्यम से मध्यका वर्ग का अवलोकन करना होगा। जिसका सूत्र $\frac{N}{2}$ होगा। तदुपरांत निम्न सूत्र का प्रयोग करना होगा :

$$m = L_1 + \frac{I}{f}(m-c)$$

जहां "c" का आशय मध्यका वर्ग से ऊपर के वर्ग की संचयी आवृत्ति होगा ।

उदाहरण : 6

निम्नलिखित समंकों से मध्यका का मान ज्ञात कीजिये :

x	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	3	7	10	20	10	7	3

हल:

x	f	cf
0-10	3	3
10-20	7	10
20-30	10	20
30-40	20	40
40-50	10	50
50-60	7	57
60-70	3	60

$$m = \frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$m = L_1 + \frac{1}{f}(m-c)$$

$$= 30 + \frac{10}{20}(30-20)$$

$$= 30 + \frac{10}{20} \times 10$$

$$= 30 + 5 = 35$$

मध्यका के समान अन्य विभाजन की गणना सूत्रों को निम्न प्रकार किया गया है ।

	व्यक्तिगत श्रेणी में	खण्डित श्रेणी	अखण्डित या सतत श्रेणी में
Median (M)			Median = Size of $\left(\frac{N+1}{8}\right)th$ item $M = L_1 \frac{1}{f}(m-c)$
Quartiles (Q_1)		Size of $\left(\frac{n+1}{5}\right)th$ item	q1 $= \left(\frac{N}{4}\right) Q1 =$ L_1+ i(q_1-c)
(Q_3)	$size\ of\ \frac{3(N+1)^{th}}{4} item$	$size\ of\ \frac{3(N+1)^{th}}{4} item$	$q3 = \left(\frac{3(N)}{4}\right) Q_3 = L_1 + \frac{1}{f}(q3-c)$
Quartiles (Q_1)	$size\ of\ \frac{(N+1)^{th}}{5} item$	$size\ of\ \frac{(N+1)^{th}}{5} item$	$qn_1 = \left(\frac{N}{5}\right) Q_1 = L_1 + \frac{1}{f}(q_3-c)$
(Q_4)	$size\ of\ \frac{4(N+1)^{th}}{5} item$	$size\ of\ \frac{4(N+1)^{th}}{5} item$	
Quartiles (Q_1)	$size\ of\ \frac{(N+1)^{th}}{8} item$	$size\ of\ \frac{(N+1)^{th}}{8} item$	$O_1 = \left(\frac{N}{8}\right) O_1 = L_1 + \frac{1}{f}(O_1-c)$

(Q_n)	size of $\frac{n(N+1)^{th}}{8}$ item	size of $\frac{n(N+1)^{th}}{8}$ item	
Deciles (D_1)	size of $\frac{(N+1)^{th}}{10}$ item	size of $\frac{(N+1)^{th}}{10}$ item	$d_1 = \left(\frac{N}{10}\right) D_1 = L_1 + \frac{i}{f}(d_1 - c)$
(D_7)	size of $\frac{7(N+1)^{th}}{10}$ item	size of $\frac{7(N+1)^{th}}{10}$ item	
(D_n)	size of $\frac{n(N+1)^{th}}{10}$ item	size of $\frac{n(N+1)^{th}}{10}$ item	
Percentiles (P_1)	size of $\frac{(N+1)^{th}}{100}$ item	size of $\frac{(N+1)^{th}}{100}$ item	$P_1 = \left(\frac{N}{100} P_1\right) = L_1 + \frac{1}{f}(p_1 - c)$
(P_{38})	size of $\frac{38(N+1)^{th}}{100}$ item	size of $\frac{38(N+1)^{th}}{100}$ item	$p38 = L_1 + \frac{i}{f}(p38 - c)$
(P_{56})	size of $\frac{56(N+1)^{th}}{100}$ item	size of $\frac{56(N+1)^{th}}{100}$ item	
(P_n)	size of $\frac{n(N+1)^{th}}{100}$ item	size of $\frac{n(N+1)^{th}}{100}$ item	$P_n = \left(\frac{n(N)}{100}\right) Pn = L_1 + \frac{1}{f}(P_n - c)$

गणितीय माध्य (Mathematical averages) इस श्रेणी के तीन औसतोंको सम्मिलित किया जाता है,जिन की अपनी बीजगणितीय संपतिया होती है।

4.5 समान्तर माध्य

समान्तर माध्य से आशय किसी श्रेणी के समस्त मूल्यो के योग भी पद मूल्यों की संख्या का भाग देकर ज्ञात किया जाता है अर्थात $\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$ जहां ξ =समान्तर माध्य, N से आशय पद मूल्यो का संख्या एवं $\sum x$ से आशयपद मूल्यो के योग से है।

विभिन्न श्रेणियों में समान्तर माध्य की गणना को निम्न प्रकार से समझाया गया है।

(a) व्यक्तिगत श्रेणी में: इस श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना के सूत्र निम्न प्रकार है:

प्रत्यक्ष रीति	लघु रिति
$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$	$\overline{X} = A \times \frac{\sum X}{N}$

उदाहरण: 7

नीचे दिये गये समंको से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये:

हल:

प्रत्यक्ष रीति		लघु रीति		
X		x	dx x-A A=5	
3	$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$	3	- 2	
10	$= \frac{60}{6} \times 10$	10	+5	
7		7	+2	
20		20	+15	
12		12	+7	
8		8	+3	
$\sum X =$ 60			30	

(b) खण्डित श्रेणी: इस श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना के सूत्र निम्न प्रकार है:

प्रत्यक्ष रीति	लघु रीति
$\overline{X} = \frac{\sum fX}{N}$	$\overline{X} = A + \frac{\sum fdX}{11}$

उदाहरण : 8

निम्नलिखित समंको से समान्तर माध्य की गणना कीजिये:

X	0	1	2	3	4	5	6
F	2	4	6	8	6	4	2

हलः

प्रत्यक्ष रीति				लघु रीति				
x	f	fn		x	f	Dx A=2 (x-A)	fdx	
0	2	0	$\overline{X}=\frac{\sum fX}{N}$ $=\frac{96}{32}=3$	0	2	-2	-4	$\overline{X}=A+\frac{\sum fdX}{N}$ $=2+\frac{32}{32}$ $=2+1=3$
1	4	4		1	4	-1	-4	
2	6	12		2	6	0	0	
3	8	24		3	8	+1	8	
4	6	24		4	6	+2	12	
5	4	20		5	4	+3	12	
6	2	12		6	2	+4	8	
	32	96					32	

(c) सतत श्रेणी में: सतत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना सूत्रों को निम्न प्रकार सारणीबद्ध किया गया हैः

प्रत्यक्ष रीति	लघु रीतियां	
$\overline{X}=\frac{\sum fX}{N}$ $x=m.v.$	काल्पनिक माध्य से विचलन द्वारा	काल्पनिक माध्य एवं पद विचलन द्वारा
	$\overline{x}=A+\frac{\sum fdx}{N}$	$\overline{x}=A+\frac{\sum fdx}{N}\times i$

उदाहरण : 9

समस्त विधियों का प्रयोग करते हुए समानान्तर माध्य की गणना कीजियेः

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
F	2	6	12	40	12	6	2

हलः (i) प्रत्यक्ष रीति

x	f	X mv	fx
0-10	2	5	10
0-20	6	15	90
20-30	12	25	300
30-40	40	35	1400
40-50	12	45	540
50-60	6	55	330
60-70	2	65	130

	80		2800

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{2800}{80} = 35$$

(ii) लघु रीति

X	X mv	dx (x-A) x-25 A=25	x	fdx	dx	d'x= $\frac{dx}{10}$	fd'x
0-10	5	-20	2	-40	-20	-2	-4
10-20	15	-10	6	-60	-10	-1	-6
20-30	25	0	12	0	0	0	0
30-40	35	+10	40	400	+10	+1	40
40-50	45	+20	12	240	+20	+2	24
50-60	55	+30	6	180	+30	+3	18
60-70	65	+40	2	80	+40	+4	8
	x	X	80	800	X	Y	80

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fdx}{N} \quad , \quad \bar{x} = A + \frac{\sum fd'x}{N}$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{800}{80}, \quad = 25 + \frac{80}{8} \times 10$$

$$= 25 + 10 = 35, \quad = 25 + 10 = 35$$

समान्तर माध्य,बहुलक व मध्यका के अनुसंधानात्मक सम्बन्ध

वस्तुतः जब कोई आवर्ती वितरण पूर्णतः समित होता है तो उससे समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक का मान बराबर होता है। किन्तु जब कोई वितरण साधारण रूप से विषम (Moderately asymmetrical) हो तो सामान्यतया इनके मान पृथक-पृथक होंगे। प्रो॰कार्ल पियर्सन के प्रयोगात्मक अनुसंधान के आधार पर यह पाया गया कि साधारण रूप असीमित वितरण में : Z= 3m-2 ξ or Z=3(ξ-m) होता है।इनमे पारस्परिक सम्बन्ध पर आश्रित उदाहरण 10 निम्न प्रकार है:

उदाहरण : 10

Calculate the following central measures in a moderately asymmetrical distribution:

एक सामान्य रूप से असममति बंटन में निम्न केंद्रीय मापो की गणना कीजिये:

(i) Median if ξ=19.5 m Z=21

(ii) Mode if ξ=15 and M=18

(iii) Arithmatic mean if M=24 and Z=28

हल:

$(i) \quad M = \frac{1}{3}(2\bar{x} + Z) \quad or \quad \frac{1}{3}(2 \times 19.5 + 21) \quad = 20$

$(ii) \quad Z = 3M - 2\xi, \quad or \quad 3 \times 18 - 2 \times 15 \quad = 24$

$(iii) \quad \xi = \frac{1}{3}(3M - Z), \quad or \quad \frac{1}{2}(3 \times 24 - 28) \quad = \frac{1}{2}(72 - 28) = 22$

4.6 गुणोत्तर माध्य

गुणोत्तर माध्य से आशय "n" संख्यों के गुणनफल के "n" वर्गमूल से है अर्थात

Geometric mean (GM) $= \sqrt{a \times b}$, दो पद मूल्य होने पर

Or

GM = $3\sqrt{a \times b \times c}$ तीन पद मूल्य होने पर

Or GM = $4\sqrt{a \times b \times c \times d}$ चार पद मूल्य होने पर

इसी प्रकार

लघुगुणक की सहायता से गुणोत्तर माध्य की गणना निम्न प्रकार की जा सकती है:

$$GM = Anti\log\left(\frac{\sum \log X}{N}\right)$$

उदाहरण : 11

निम्नांकित दो श्रेणियों मे गुणोत्तर माध्य की गणना कीजिये:

Series 'A'	3884	173	63	5	.4	.08
Section 'B'	.8974	.0252	.0081	.0002	.4010	.0300

हल:

Calculation of G.M.

Series A		Series B	
X	log X	X	log X
3884	3.5893	.8974	1.9530
173	2.2380	.0252	2.4014
63	1.7993	.0081	3.9085
5	0.6990	.0002	4.3010
.4	1.6021	.4010	1.6031
.08	2.9031	.0300	2.4771
N =6	ΣlogX = 6.8308	N = 6	ΣlogX = 10.6441

$$G.M = A.L.\left(\frac{\sum \log X}{N}\right)$$

Series A	Series B
$G.M = A.L.\left(\frac{6.8308}{6}\right)$ $= A.L.(1.1385)$ $= 13.76 Ans.$	$G.M = A.L.\left(\frac{\overline{12} + 2.6441}{6}\right)$ यहां 10 में 6 का पूरा - पूरा भाग न जाने के कारण निम्न प्रकार संशोधन किया गया है, जिसका गणितीय रूप में अंतर नहीं पड़ेगा - $A.L.\left[\frac{\overline{12} + 2.6441}{6}\right]$ $AL. = \overline{2}.4407 = .02758\ Ans.$

खण्डित एवं सतत श्रेणी में

गुणोत्तर माध्य की गणना खण्डित एवं सतत श्रेणी एक समान रूप से ही की जाती है । खण्डित श्रेणी में जहां लघु गुण पद मूल्य के लिये ज्ञात किये जाते हैं, वहीं सतत श्रेणी में ये मध्य मूल्य (Mid value) के लिये किये जाते हैं । शेष प्रक्रिया समान होते हैं ।

उदाहरण : 12

निम्न समंकों से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये

Age (in yrs.) Less then	10	20	30	40	50
No. of persons	5	12	20	23	25

हल:

Calculation of Geometric Mean

Age	No. of persons	Mid value X	log x	log xy
0-10	5	5	0.6990	3.4950
10-20	7	15	1.1761	8.2327
20-30	8	25	1.3979	11.1832
30-40	3	35	1.5441	4.6323
40-50	2	45	1.6532	3.3064
	N = 25			$\sum \log Xf = 30.8496$

G.M. =A.L. $\left[\frac{\sum \log Xf}{N}\right]$=A.L$\left[\frac{30.8496}{25}\right]$=A.L.$[1.23398]$ or

A.L.$^{[1.2340]}$=17.14 years

गुणोत्तर माध्य द्वारा वृद्धि दर की गणना

गुणोत्तर माध्य की मान्यता पर वृद्धि दर तथा एक समय इस दर कुल मूल्य की गणना की गणना निम्न सूत्रों से की जाती हैं;

$P_n = P_0 \ (1+r)^n$ $\qquad$ $r = n\sqrt{\frac{Pn}{P}} = 1$

उदाहरण : 13

सन् 1981 में एक शहर की जनसंख्या 4,00,000 थी जो बढ़कर 1991 में 5,00,000 हो गयी वृद्धि की वार्षिक प्रतिशत दर ज्ञात कीजिये । (ब) वृद्धि की समान दर से वर्ष 1996 में जनसंख्या क्या होगी।

हल:

(a) यहां जनसंख्या वृद्धि की वार्षिक दर ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग करना होगा-

$r = \sqrt[n]{\frac{Pn}{Po}}$ - $\qquad$ Here: r = Growth rate; n = No. of years i.e. 10

P_n = Population in 1991 i.e 5,00,000

P_o = population in 1981 i.e 4, 00,000

अत: $\quad r = \sqrt[10]{\frac{5,00,000}{4,00,000}} -1$

यहां logs के माध्यम से हल करने पर : $r = A.L.\left[\frac{\log 5,00,000 - \log 4,00,000}{10}\right]$

$$= A.L.\left[\frac{5.6990 - 5.6021}{10}\right] - 1, \ Or = A.L.\left[\frac{0.0969}{10}\right] - 1, or \ A.L.(0.00969) - 1$$

= 1.023 -1 =0.023 $\therefore$, $\qquad$ Growth rate (r) 0.023 or 2.3%

(b) $P_n = P_o \ (l + r)^n$

Here: P_n = 1996 की अनुमानित जनसंख्या तथा P_o = 1991 की जनसंख्या =5, 00,000

r = जनसंख्या वृद्धि की वार्षिक दर = 0.023 तथा n = वर्षों की जन संख्या (1996 -1991) =5

$\therefore$Pn = 5, 00,000 $(1+0.023)^5$ or Pn = A.L [log 5, 00,000 + (log 1.023 $\times$5)]

Or A.L. [5.6990 + (0.0099$\times$5)] or A.L. (5.7485) = 5,60,400

4.7 हरात्मक माध्य

वस्तुत : हरात्मक माध्य एक पद माला के विभिन्न पद मूल्यों के व्युत्क्रमों के औसत के व्युत्क्रम के बराबर होता है । सूत्रानुसार:

$$HM = \text{व्युत्क्रम} \ \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{N}$$

या $\qquad$ $$HM = \text{Recprocal} \ \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{N}$$

जहां HM = हरात्मक माध्य (Harmonic Mean), = और

X_1 ,x_2 आदि = चर के मान (Value of the variable) और

N = पदों की संख्या (Number of items)

उदाहरण : 14

एक कारखाने में किसी कार्य को ए ने 4 मिनट में, बी ने 5 मिनट में, सी ने 6 मिनट में, डी ने 10 मिनट में तथा ई ने 12 मिनट में पूरा किया । (i) उनके कार्य की औसत गति क्या रही? (ii) प्रति मिनट पूरे किये कार्य में औसतन कितनी इकाइयां बनाई थी? (iii) इसी गति से 6 घण्टे के एक दिन में वे कितनी इकाइयां बना लेंगे?

हल:

(i) यहां कार्य की औसत दर या गति हरात्मक माध्य द्वारा ज्ञात करनी होगी :

$$H.M = Rec.\left[\frac{Rec\ 4 + Rec\ 5 + Rec\ 6 + Rec\ 10 + Rec\ 5}{N}\right]$$

$$= Rec.\left[\frac{0.25 + 0.20 + 0.167 + 0.10 + 0.083}{N}\right]$$

$$or, \quad \text{Re}\,ciprocal\left(\frac{0.80}{5}\right) = \text{Re}\,c.0.16 = 6.25\,\text{min}\,utes$$

(ii) चूंकि किसी कार्य को अथवा अमुक इकाइयों को बनाने में 6.25 मिनट लगते हैं तो स्वाभाविक रूप से 1 मिनट में किया जाने वाला कार्य अथवा पूर्ण हुई इकाइयां 1/6.25 से होगी।

उदाहरण : 15

निम्न समंकों से बहुलक ज्ञात कीजिये

Class	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
Frequency(f)	5	9	13	21	20	15	8	3

हल :

Grouping and Analysis Table

Class	Frequencies 1	2	3	4	5	6	Analysis	
10-20	5	14		27				
20-30	9		22		43		I	1
30-40	13	34				54	II	2
40-50	21 f_0		41	56			IIII	5
50-60	20 f_1	35			43		IIII	5
60-70	15 f_2		23			26	III	3
70-80	8	11					I	1
80-90	3							

उपर्युक्त सारणी से ज्ञात होता है कि 40-50 एवं 50-60 दोनों वर्गो की बारम्बारता 5-5 जो सर्वाधिक है एक समान आ रही है अत: निम्न प्रकार घनत्व परीक्षण (f_1 +f_o+f_2) करना होगा-

	f_1 + f_o+ f_2 = Total
40-50 वर्ग के लिये	21 + 13 + 20 = 54
50-60 वर्ग के लिये	20 + 21 + 15 = 56

यहां यह निष्कर्ष निकलता है कि बहुलक वर्ग तो 50-60 ही है चाहे 40 से 50 की आवृत्ति (21) सर्वाधिक है परन्तु इस असामान्य स्थिति में बहुलक के सामान्य सूत्र से निकाले गये बहुलक का मूल्य बहुलक वर्ग के बाहर का मूल्य होगा जो निम्न गणना से स्पष्ट है:-

$$Z = L_1 + \left(\frac{f1 - f0}{2f1 - f0 - f2} \times i\right), \qquad = 50 \left(\frac{20-21}{2\times 20-21-15}\times 10\right)$$

$$= 50 + \left(\frac{-4}{4}\times 10\right) \qquad \text{Or} \qquad 50 - 2.5 = 47$$

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि उपर्युक्त सूत्र से ज्ञात किया गया बहुलक मूल्य (z) 47.5 बहुलक वर्ग 50-60 के बाहर का मूल्य आ रहा है । अतः इस असामान्य स्थिति में सही वास्तविक बहुलक मूल्य के निर्धारण हेतु निम्न वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करना होगा

$$Z = L_1 + \left(\frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i\right) = 50 + \left(\frac{15}{21+15} \times 10\right) = 50 + \left(\frac{150}{36}\right) = 54.17$$

उदाहरण : 16

निम्नलिखित समंकों से मध्य के 30% एवं 70% व्यक्तियों की आय सीमाएं ज्ञात कीजिये :

Income	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
No. of persons	5	9	15	20	30	18	15	12	9	7

हल :

यहां मध्य 30% सीमाएं ज्ञात करने हेतु शेष 70%को दोनों छोरों की ओर बराबर छोड़ने पर Lower limit o+35 = 35% से Upper limit 100-35=65% तक होगी अर्थात हमें P_{35} एवं P_{65} ज्ञात करने होंगे ।

इसके विपरीत मध्य 70% सीमाएं ज्ञात करने हेतु शेष 30% को दोनों छोरों की ओर बराबर-बराबर छोड़ते हुए 0+15 = 15% से 100-15 = 85% तक की सीमा ज्ञात करनी होगी अर्थात् P_{15} एवं P_{85} ज्ञात करना होगा जो निम्न प्रकार निकाले गये हैं :- N= 140

Income	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
No. of persons	5	9	15	20	30	18	15	12	9	7
c.f.	5	14	29	49	79	97	112	124	133	140

$$P_{35} = 35\left(\frac{N}{100}\right)^{th} item, \quad or \quad \frac{35 \times 140}{100} 49^{th} item$$

∴Relevant group is 30-40 and $P_{35} = L_1 + \frac{i}{f}\left(P_{35} - C\right)$

$$or \quad 30 + \frac{10}{20}(49-29) \quad 30 + \left(\frac{10}{20} \times 20\right) = 40$$

इसी प्रकार $P_{65}\left(\frac{N}{100}\right)^{th} item \quad = \left(\frac{65 \times 140}{100}\right)^{th} item = 91th\ item$

∴Relevant group is 50-60 and $P_{65} = L_1 + \frac{i}{f}\left(p_{65} - c\right)$

$$or \quad 50 + \left[\frac{10}{18} \times (91-79)\right] = 50 + \left(\frac{10}{18} \times 12\right) = 50 + 6.67 = 56.67$$

अत: मध्य के 30% व्यक्तियों की आय 40 रु. से 56.67 रू. के बीच होगी ।

$$P_{15} = 15\left(\frac{N}{100}\right)^{th} item = \frac{15\times10}{100} = 21^{st} item$$

$\therefore$ Relevant group is 50-60 and $P_{15} = L_1 + \frac{i}{f}(p_{15} - c)$

Or $$20 + \frac{10}{15}(21-14) = 20 + \left(\frac{10\times7}{15}\right) = 24.67$$

$$P_{85} = 85\left(\frac{N}{100}\right)^{th} item = \frac{85\times100}{100} = 119^{th} item$$

$\therefore$ Relevant group is 70-80 and $p_{85} = l_1 + \frac{i}{f}(p_{85} - c)$

or $$70 + \frac{10}{12}(119-112) = 70 + \left(\frac{10}{12}\times7\right) = 70 + 5.83 = 75.83$$

अत: मध्य के 70% व्यक्तियों की आय 24.67 से 75.83 रूपये के बीच होगी ।

4.8 स्वपरख प्रश्न

1. सांख्यिकीय माध्य से आप क्या समझते हैं ' एक माध्य में कौन-कौन से वांछनीय गुण होने चाहिये 7 किन माध्यों में ये गुण पाये जाते हैं
2. 'केन्द्रीय प्रवृत्ति' से क्या अभिप्राय है ' इसके मापने की विभिन्न रीतियों का वर्णन कीजिये और प्रत्येक रीति की उपयोगिता पर प्रकाश डालिये ।
3. विभिन्न प्रकार के माथों का काल कीजिये तथा उनके सापेक्ष लाया एवं हानियों का विवेचन कीजिये ।
4. 'प्रत्येक माध्य की अपनी-- अपनी विशेतताएं होती है । यह कहना कठिन है कि कौनसा माध्य सबसे उत्तम है । ' सोदाहरण व्याख्या कीजिये ।
5. उत्तम माध्य के क्या लक्षण हैं ? गुणोत्तर माध्य मे से लक्षण कहा तक पाये जाते है ?

व्यवहारिक प्रश्न

1. निम्नलिखित समंकों से समानान्तर माध्य, मध्यका, बहुलक तथा दोनों चतुर्थक ज्ञात कीजिए:

19	15	28	18	15	21	30	32	11
40	20	11	22	35	15	23	22	12

Ans: ξ = 21.61, M=20.5,Z=15,Q_1 = 15, Q_3=28.5

2. निम्नलिखित समंकों से समानान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक की गणना कीजिए

(i) 4 8 7 6 5 9 2

(ii) 10.5 15.6 18.7 13.9 14.4 20.8 16.9 17.2

Ans (i) ξ =5.86; M 6; Z = 6.28 (ii) ξ =16;M =16.25;Z=16.75

3. निम्नलिखित समंकों से समानान्तर माध्य, मध्यका तथा भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए '

7 4 17 19 11 16 15 14 9 11

यदि उपर्युक्त समंकों में निम्नलिखित समंकों को और जोड़ दिया जाता है तब सभी समंकों का समानान्तर माध्य, मध्यका एवं भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए:

18 14 14 8 10 21

Ans (i) 8=12.3; M=I2.5; Z = 11 (ii) 8=I3; M = 14 ; Z=14

4. निम्नलिखित समंकों के समानान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए

Roll No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marks Obtained	40	50	45	50	65	70	36	30	62	50

Ans. 8 = 49.8; M = 50; Z = 50

5. आपको निम्न वाक्यांश दिया हुआ है :

शेक्सपियर के उपर्युक्त कथन में प्रयुक्त शब्दों एवं प्रत्येक शब्द के अक्षरों का खंडित आवृत्ति वितरण तैयार कीजिये । इस वितरण का माध्य, मध्यका एवं बहुलक भी ज्ञात कीजिये ।

Ans 8 = 49.8; M =4, z = 4

6. एक फुटकर दुकान से सम्बन्धित समंक निम्न प्रकार है :

No. of days a packet of Surf lasts per family	14	20	50	10	40	Total
No. of customers	20	24	10	18	28	100

गणना कीजिये: (अ) सर्फ के एक पैकेट के प्रयोग की औसत विधि । (व) छः माह (180 दिन) की अवधि में उपर्युक्त ग्राहकों द्वारा सर्फ की अपेक्षित कुल उपभोग मात्रा ।

Ans. (a) 25 .6 days; (b) 703.125 packets.

7. एक क्लब ने एक माह में 30 मैच खेले और निम्नलिखित गोल प्रति मैच किए, किए गये गोलों की औसत संख्या, मध्यका तथा बहुलक की गणना कीजिए :

Matches Played	4	7	8	6	5
No. of goals scored per match	3	5	4	0	2

[*]Ans.8=3; M=4; Z=4.

8. निम्नलिखित समंकों से समानान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए :

X	4	8	12	15	20	25	28	30
F	5	7	12	19	17	19	15	6

[*]Ans.8=19.2; M=20; Z=20.

9. एक फर्म के 30 कर्मचारियों का मासिक वेतन निम्न प्रकार है:

140	139	126	114	100	88	62	77	99	103
108	129	114	148	134	63	69	148	132	118
142	116	123	104	95	80	85	106	123	133

निम्न वेतन वर्गाँ- के कर्मचारियों को फर्म ने क्रमश: 10, 15, 20, 25, 30 तथा 35 रू. का अधिलाभांश प्रदान किया । 60 रू. से अधिक लेकिन 75 रू. से अधिक नहीं, 75 रू. से अधिक लेकिन 90 रू. से अधिक नहीं और इसी प्रकार 136 - 150 तक । कर्मचारियों के औसत अधिलाभांश की ज्ञात कीजिए ।

[*]Ans.Average Bonus Rs.24.50

10. निम्नलिखित समंकों से (अ) माध्य, (ब) मध्यका, (स) बहुलक तथा (द) दोनों चतुर्थक की गणना कीजिए:

Age	No.of persons	Age	No.of persons
20-25	100	40-45	300
25-30	140	45-50	240
30-35	200	50-55	140
35-40	360	55-60	120

[*]Ans.8=40.31,M=40,Z=38.64,Q1=34,Q3=47.08

11. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के अनुसार समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए :

Class	Frequency	Class	Frequency
10-20	1	60-70	11
20-30	3	70-80	7
30-40	6	80-90	6
40-50	11	90-100	3
50-60	9	100-110	1

[*]Ans.8=59.14,M=58.9; Z=55

12. निम्नलिखित समंकों से मध्यक, मध्यका तथा बहुलक की गणना कीजिए

Central size	5	15	25	35	45	55	65	75
Frequency	10	20	28	44	42	32	18	6

[*] से आशय विभिन्न परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्नों से है ।

4.9 अपकिरण

अर्थ एवं आवश्यकता : अपकिरण से आशय बिखराव की उस सीमा से है, जिस सीमा तक एक समंक माला के विभिन्न पद मूल्य केन्द्रीय मूल्य से दूर तक फैले हों । केन्द्रीय प्रवृत्ति

के मापक इस बात आभास कराते हैं कि संग्रहित समंकों का प्रतिनिधि मूल्य क्या है? ये मापक पद मूल्यों की केन्द्रीय बिन्दु से दूरी की मात्रा एवं संगतता का अध्ययन नहीं करते ।

प्राय: देखा जाता है कि दो या दो से अधिक समंक मालाओं के औसत मूल्यों के समान होते हुए भी उनकी प्रकृति में महत्त्वपूर्ण अंतर हो सकता है । इसी प्रकार विभिन्न समंक मालाओं के औसत मूल्यों के भिन्न होने पर भी उनकी प्रकृति समान हो सकती है । इस बात को निम्नलिखित समंक मालाओं के अवलोकन से समझा जा सकता है ।

SeriesA	SeriesB	SeriesC
50	46	1
50	47	29
50	48	30
50	49	40
50	50	50
50	51	60
50	52	70
50	53	80
50	54	90
450	450	450
$\overline{X} = \frac{450}{9} = 45$	$\frac{450}{9} = 45$	$\frac{450}{9} = 45$

A, B तथा C वितरणों के समानान्तर माध्य समान है किन्तु फिर भी प्रत्येक वितरण की प्रकृति में मूलभूत अंतर है । प्रथम वितरण (A) मैं जहां अपकिरण का प्रभाव है वही वितरण ''B'' तथा ''C'' वितरण में क्रमश: अपकिरण की मात्रा अधिक व्यापक है । ठीक इसी प्रकार व्यवहार में कुछ ऐसे वितरण भी हो सकते हैं जिनके माध्य पृथक-पृथक हों किन्तु बिखराव की दृष्टि से उनकी प्रकृति एक समान हो ।

X वितरण	Y वितरण
40	500
41	501
42	502
43	503
44	504
ξ =42	$\overline{y}$ =502

X तथा Y वितरण के माध्य मूल्यों में बहुत अधिक अंतर है किन्तु दोनों वितरणों में निरपेक्ष अपकिरण की मात्रा समान है ।

4.10 अपकिरण के प्रकार

माप एव उपयोग की दृष्टि से अपकिरण दो प्रकार की हो सकती है :

(i) निरपेक्ष अपकिरण : जब अपकिरण की मात्रा को उसी इकाई में व्यक्त किया जाता है जिस इकाई में समंक प्रदत्त है तो यह अपकिरण की निरपेक्ष माप कहलाती है । उदाहरणार्थ - निम्न समंक माला में निरपेक्ष अपकिरण की निरपेक्ष माप 90 रु. है (100-10)ए रु. 10,20,30,50,100

(ii) सापेक्ष अपकिरण : जब अपकिरण की मात्रा को अनुपात, प्रतिशत या गुणांक के रूप में व्यक्त किया जाता है तो यह निरपेक्ष अपकिरण कहलाती है । दो या दो से अधिक समंक मालाओं में व्याप्त अपकिरण का तुलनात्मक अध्ययन करने हेतु निरपेक्ष माप नहीं वरन् सापेक्ष माप 'की ही गणना. करनी होती है ।

4.11 अपकिरण की माप

यद्यपि अपकिरण की माप की अनेक गणनाओं का व्यवहारिक प्रयोग किया जाता है, तथापि यहां कुछ ऐसी मापों का ही उल्लेख किया गया है जो सामान्यरूप से प्रयुक्त होती हैं

(i) विस्तार (Range)

(ii) अंतः चतुर्थक विस्तार (Inter quartile)

(iii) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

(iv) माध्य विचलन (Mean Deviation)

(v) प्रमाप विचलन (standard Deviation)

(i) विस्तार (Range) : अधिकतम व न्यूनतम मूल्य के अन्तर को ही विस्तार कहा जाता है । इसकी गणना के सूत्र निम्न प्रकार है :-

निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप
R = H-L	Coefficient of Range $= \frac{H-L}{H+L}$

उदाहरण : 1

निम्न सूचनाओं से प्रत्येक श्रेणी के लिये विस्तार तथा विस्तार गुणांक की गणना कीजिये:

Series I		Series II		Series III	
Name	x	x	f	x	f
A	40	0	3	0-10	100
B	30	1	7	10-20	200
C	50	2	10	20-30	300
D	35	3	15	30-40	400
E	70	4	3	40-50	300

F	80	5	2	50-60	200
G	100	0		60-70	100
Individual		Discrete		Continuous	

हल :

Series I	Series II	Series III
R = H-L =80-30 =50 $COR=\frac{H-L}{H+L}=\frac{50}{80+30}=\frac{50}{110}=0.45$	R= H-L = 5-0 = 5	R = H-L=70-0 =70 $COR=\frac{70-0}{70+0}=\frac{70}{70}=1$

(ii) अन्तर चतुर्थक विस्तार : यह माप मध्य के 50 % पदों को ध्यान में रखकर ही ज्ञात की जाती है । इसके गणना सूत्र निम्न प्रकार है :

निरपेक्ष	सापेक्ष
I.Q.R $=Q_3$ - Q1	Coefficien of I.Q.R = $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

(iii) चतुर्थक विचलन : यह माप अन्तर चतुर्थक विस्तार में दो का भाग देकर ज्ञात की जाती है । इसके गणना सूत्र निम्न प्रकार है :

निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप
$Q.D=\frac{Q_3-Q_1}{2}$	$Coefficient Q.D=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

उदाहरण : 2

चतुर्थकों पर आश्रित अपकिरण की समस्त की माप ज्ञात कीजिये :

Series I		Series II		Series III	
		X	Y	X	Y
A	40	0	2	0-10	3
B	41	1	3	10-20	7
C	42	2	4	20-30	10
D	43	3	5	30-40	20
E	44	4	4	40-50	10
F	45	5	3	50-60	7
G	46	6	2	60-70	3

हल : Series I

Size of lower quartile $(q_1)=\frac{N+1}{4}=\frac{7+1}{4} Hence\ Q_1=41$

Size of upper quartile $(q_3) = \frac{N+1}{4} \times 3 = \left(\frac{7+1}{4}\right)3 = 6$

Hence Q_3 =45

(a) Dispersion based on I .Q.R

Inter quartile range = Q_3 - Q_1 = 45 - 41 = 4

Coefficient of I.Q.R $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = 41$

(b) Dispersion based on Q.D.0.7 $= \frac{45-41}{45+41} = \frac{4}{86} = 0.047$

$$Q.D. = \frac{45-41}{45+41} = 0.047$$

Coefficient of Q.D $= \frac{45-41}{45+41} = 0.047$

Series II

x	0	1	2	3	4	5	6	
f	2	3	4	5	4	3	2	23
c.f	2	5	9	14	18	21	23	

$q_1 = \frac{N+1}{4} = \frac{23+1}{4} = 6,$ स्पष्टतया $q_1 = 2$

$q_3 = \left(\frac{N+1}{4}\right)3 = 18$ $Q_3 = 4$

$l.\ QR = Q_3 - Q_1 = 4 - 2 = 2,$ Cof R = $\frac{2}{4+2}$ = 0.33

$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{4-2}{2} = 1,$ $C\ of\ R = \frac{4-2}{4+2} = 0.33$

Series III

X	Y	Cf
0-10	3	3
10-20	7	10
20-30	10	2
30-40	20	40
40-50	10	50
50-60	7	57
60-70	3	60
	60	

$q_1 = \frac{N}{4} = \frac{60}{4} = 15 i.e.$

q_1 $size\ is\ 20-30$

$Q_3 = L_{1+(1)f}\left(q_1 - c\right)$

$= 20 + \frac{10}{10}\left(15-10\right) = 25$

$$q_3 = \left(\frac{N}{4}\right) = \frac{60}{4} \times 3 = 45$$ Hence group for q_3 is 40 - 50

$$I.Q\,R = Q_3 - Q_1 = 45 - 25 = 20 C.I.Q.R = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{20}{70} = 0.28$$

$$Q.R = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{45-25}{2} = 10 \; and \; CIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{45-25}{45+25} = \frac{20}{70} 0.28$$

माध्य विचलन : माध्य विचलन किसी को माध्य (बहुलक, मध्यिका या समानान्तर माध्य) से लिये गये ऐसे विचलनों के योग का बीजगणितीय चिन्हों का ध्यान में रखे बिना लिये गये हो । माध्य विचलन की निरपेक्ष तथा सापेक्ष माप की गणना निम्न सारणीबद्ध सूत्रों से की जा सकती है -

विवरण	निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप
(i) जब विचलन समान्तर माध्य से लिए गए हो।	$\delta_{\bar{x}} = \frac{\sum \lvert d\bar{x} \rvert}{N}$	$Coefficient\ of\ = \frac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{x}}$
(ii) जब विचलन मध्यिका से लिए गए हो।	$\delta_m = \frac{\sum \lvert dm \rvert}{N}$	$Coefficient\ of\ \delta_m = \frac{\delta_m}{m}$
(iii) जब विचलन बहुलक से लिए गए हो।	$\delta_m = \frac{\sum \lvert dz \rvert}{N}$	$Coefficient\ of\ \delta_z = \frac{\delta_z}{z}$

माध्य विचलन की गणना को निम्न उदाहरण की सहायता से समझाया गया है।

(a) श्रेणी की अवस्था में :

उदाहरण : 3

नीचे दिये गये समंकों से विभिन्न माध्यों को काम में लेते हुए माध्य विचलन ज्ञात कीजिये ।

हल :

(i) समान्तर माध्य का प्रयोग करते हुए

X	10	8	7	8	4	5	42
$\lvert d\xi \rvert$	3	1	0	1	3	2	10

$$\bar{x} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\sum d\bar{x}}{N} = \frac{10}{6} = 1.66, \qquad Coefficient\ of\ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{1.66}{7} = 0.24$$

(ii) मध्यिका का प्रयोग करते हुए

x	4	5	7	8	8	10	$\sum dx$
$\lvert d\xi \rvert$	3.5	2.5	0.5	0.5	0.5	2.5	10

M= $\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2}$

$= \frac{7}{3.} = 3.5$ $\qquad m = \frac{7+8}{2} = 7.5$

$$\delta_m = \sum \frac{|dm|}{N} = \frac{10}{6} = 1.66$$

Coefficient of $\delta_m = \frac{\delta_m}{m} = \frac{1.66}{7.5} = 0.22$

(iii) बहुलक से विचलन लेने पर

प्रस्तुत श्रेणी में 8 का पद मूल्य दो बार अर्थात् सर्वाधिक घटित हुआ है अतः 8 ही बहुलक है ।

X	10	8	7	8	4	5	$\sum dx$
$\lvert dz \rvert$	2	0	1	0	4	3	10

$$\delta_z = \sum \frac{dz}{N} = \frac{10}{7} = 1.66$$

Coefficient $\delta_z = \frac{\delta_2}{z} = \frac{1.66}{8} = 0.2075$

उल्लेखनीय है कि बीजगणितीय चिन्हों की अवहेलना करते हुए यदि विचलन मध्यिका से लिये जाते हैं तो विचलनों का योग न्यूनतम होता है । यही कारण कि माध्य विचलन के लिये मध्यका को आधार मानना सर्वश्रेष्ठ रहता है ।

(b) खण्डित श्रेणी की अवस्था में : इस श्रेणी में माध्य विचलन ज्ञात करने की विधि वही है जो व्यक्तिगत श्रेणी में प्रयुक्त की गयी । $|dx|$ का आवृत्ति से गुणा करके $|fdx|$ ज्ञात किया जाता है तथा निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है :

विवरण	निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप
(i) समान्तर माध्य का प्रयोग करने पर	$\delta_{\bar{x}} = \sum \frac{\lvert fd\bar{x} \rvert}{N}$	Coefficient of $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{x}}$
(ii) मध्यिका का प्रयोग करने पर	$\delta_m = \sum \frac{\lvert fd\bar{m} \rvert}{N}$	Coefficient of $\delta_m = \frac{\delta_m}{m}$
(iii) बहुलक का प्रयोग करने पर	$\delta_2 = \sum \frac{\lvert fdz \rvert}{N}$	Coefficient of $\delta_z = \frac{\delta_z}{z}$

प्रत्यक्ष गणना के लिए सतत श्रेणी में भी इन्हीं सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता हैं |

उदाहरण : 4

नीचे दिये गये समंको से मध्यिका का प्रयोग मध्य विचलन तथा उसका गुंणाक भी ज्ञात कीजिये |

x	0	1	2	3	4	5	6
f	3	7	10	20	10	7	3

हल:

X	f	cf	$\|dm\|$	$\|fdm\|$
0	3	3	3	9
1	3	3	3	9
2	10	20	1	10
3	20	40	0	0
4	10	50	1	10
5	7	57	2	14
6	3	60	3	9
	60			66

(i) $m = \frac{N+1}{2} = \frac{60+1}{2} = 30.5$ स्पष्टतया m=3 हैं |

(ii) $m = \sum \frac{|fdm|}{N} = \frac{66}{60} = 1.1$

(iii) Coefficient $\delta_m = \frac{\delta_m}{m} = \frac{1.1}{3} = 0.39$

समानान्तर माध्य अथवा बहुलक से माध्य विचलन ज्ञात करने की भी यही विधि है । इस प्रश्न यदि विचलन समान्तर माध्य या बहुलक से लिया जाए तो उत्तर यही आयेंगे क्योंकि यह एक समित वितरण है ।

(c) सतत् श्रेणी की अवस्था में : यदि गणना प्रत्यक्ष रीति से की जाय तो सतत् श्रेणी की अवस्था में भी उन्हीं सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है, जिनका उल्लेख खण्डित श्रेणी की गणना के लिये किया गया है ।

उदाहरण. 5

निम्नलिखित समंकों से माध्य विचलन की गणना समानान्तर माध्य का प्रयोग करते हुए कीजिये ।

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
F	1	4	5	30	5	4	1

हल:

X	F	Mv	Fx	$\|dx\|$	$\|fdn\|$
0-10	1	5	5	30	30
10-20	4	15	60	20	80
20-30	5	25	125	10	50
30-40	30	35	1050	0	0
40-50	5	45	225	10	50
50-60	4	55	220	20	80
60-70	1	65	65	30	30

	N=-50		1750	120	320

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1750}{50} = 35 \quad \text{and} \quad \delta_{\bar{x}} = \sum \frac{|fd_{\bar{x}}|}{N} = \frac{320}{50} = 6.4$$

Coefficient from $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{6.4}{35} = 0.18$

माध्य विचलन अपकिरण का आकलन करने की एक सरल विधि है । इसका सबसे बड़ा गुण यही है कि इसे आसानी से समझा जा सकता है एवं सरलता से प्रयुक्त किया जा सकता है । किन्तु यह माप निम्न दो ग़े से ग्रस्त हैं ।

(i) इस माप की गणना करते समय गणितीय सिद्वान्तों के अवहेलना की जाती है । यहां ऋणात्मक चिन्हों को भी धनात्मक मान लिया जाता है । यही कारण है कि इस माप का उच्च सांख्यिकीय निर्णयों में प्रयोग नगण्य है ।

(ii) यह गणना वस्तु-परक न होकर विषयगत है, क्योंकि इसके प्रयोगकर्ता को यह स्वतन्त्रता है कि माध्य विचलन वह किसी भी माध्य से ज्ञात कर सकता है ।

4.12 प्रमाप विचलन

माध्य विचलन के दो प्रमुख दोषों के कारण अग्रम सांख्यिकीय प्रक्रियाओं में इसका प्रयोग सम्भव नहीं है । वस्तुत: प्रमाप विचलन विधि अपकिरण के माप की एक ऐसी विधि है जो इस प्रकार के दोषों से मुक्त है क्योंकि प्रमाप विचलन की गणना में :

(1) बीजगणितीय चिन्हों का ध्यान में रखा जाता है । माध्य विचलन की भांति ऋणात्मक विचलनों को धनात्मक नहीं माना जाता है ।

(2) विचलन केवल समानान्तर माध्य से लिये जाते हैं । क्योंकि समानान्तर माध्य की अपनी कुछ बीजगणितीय विशेषता है जिसके कारण इसका अग्रिम सांख्यिकीय विश्लेषण में प्रयोग किया जा सकता है ।

प्रमाप विचलन को निम्नलिखित शब्दों में व्यक्त किया जा सकता है ।

वस्तुत: प्रमाप विचलन वास्तविक समानान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गो के योग के औसत का वर्गमूल है" अर्थात्

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_x^2}{N}}$$

प्रमाप विचलन के सूत्र

श्रेणी	निरपेक्ष माप		सापेक्ष माप
	प्रत्यक्ष रीति	लघु रीति	
(1) व्यक्तिगत	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$	$\sigma\sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$	$\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
(2) खण्डित श्रेणी	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}}$	$\sigma\sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$	$\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

(3) सतत श्रेणी	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}}$	बिना पद विचलन के $\sigma\sqrt{\frac{\sum fd^2{}_x}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$ पद विचलन के $\sigma\sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left(\frac{\sum fd'n}{N}\right)^2} \times i$	$\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

इन सूत्रों में अतिरिक्त विभिन्न पुस्तकों में बहुत से अन्य सूत्र भी दिये गये हैं । कुछ अपनी इच्छानुसार इनका प्रयोग कर सकते हैं । दो या दो से अधिक समंक मालाओं में व्याप्त अपकिरण का तुलनात्मक अध्ययन करने हेतु हम प्रसरण गुणांक का आकलन करते हैं ।

Coefficient of standard deviation $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

Coefficient of variation$= \frac{\sigma}{\bar{x}}$x100 जबकि प्रमाप विचलन के गुणांक को प्राय: प्रतिशत में व्यक्त नहीं किया जाता ।

(a) व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)

उदाहरण 6 :

नीचे दिये गये समंकों से प्रमाप विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए :

3,7,10,8,7

हल : प्रत्यक्ष रीति

x	dx	d^2x	गणना
3	-4	16	$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{35}{5} = 7$
7	0	0	
10	+3	-	$\sigma = \sqrt{\sum \frac{dx_x{}^2}{N}}$
8	+1	1	
7	0	0	$= \sqrt{\frac{26}{5}} = \sqrt{5.2} = 2.28$
35	0	26	

लघु रीति

X	X-A A=5 Dx	dx^2	गणना
3	-2	7	$\bar{x} = A + \frac{\sum dx}{N} = 5 + \frac{10}{5} = 7$
7	+2	4	
10	+5	25	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_x{}^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$
8	+3	9	
35	+2	4	

35	10	46	$\sigma=\sqrt{\frac{46}{5}-\left(\frac{10}{5}\right)^2}=\sqrt{5.2}=2.28$

Cv=$\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2.28}{7}=0.3257$

(b) खण्डित श्रेणी (Discrete Series)

निम्नलिखित समंकों से σ तथा cv ज्ञात कीजिए:

x	0	1	2	3	4
F	2	5	16	5	2

हल : प्रत्यक्ष रीति

x	f	dx	fdx	fd^2x
0	2	-2	-4	8
1	5	-1	-5	5
2	16	0	0	0
3	5	+1	5	5
4	2	+2	4	8
	30		0	26

$\bar{x}=\frac{0+5+32+15+8}{30}=\frac{60}{30}=2$

लघु रीति

x	f	x-A A=3 dx	fdx	fd^2_x
0	2	-3	-6	18
1	5	-2	-10	20
2	16	-1	-16	16
3	5	0	0	0
4	2	+1	2	2
	30	-5	-30	56

(c) सतत श्रेणी में

उदाहरण : 7

निम्न समंकों से σ तथा cv ज्ञात कीजिये :

x	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
F	1	3	12	3	1

हल:

(i) प्रत्यक्ष रीति

x	f	mv	fx	dx	fdx	fdx^2
0-10	1	5	05	-20	20	400
10-20	3	15	45	-10	30	300
20-30	12	25	300	0	0	0
30-40	3	35	105	+10	30	300
40-50	1	45	45	+20	20	400
	20		500		100	1400

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{500}{20} = 25$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{1400}{20}} = 8.36$$

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} x100 = \frac{8.36}{25} x100 = 33.46$$

(ii) Short cut method (पद विचलन के बिना)

x	f	mv	x-A A=15 dx	fdx	fdx^2	गणना
0-10	1	5	-10	-10	100	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$
10-20	3	15	0	0	0	
20-30	12	25	+10	120	1200	$= \sqrt{\frac{3400}{20} - \left(\frac{200}{20}\right)^2}$
30-40	3	35	+20	60	1200	
40-50	1	45	+30	30	900	$\sqrt{70} = 8.36$
	20			200	3400	

(iii) पद विचलन के साथ

mv	X-A	d'x	fd'x	$fd'x^2$	गणना

x	A=15 Dx				
5	-10	-1	-1	1	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} \times i$
15	0	0	0	0	
25	+10	1	1	12	$\sqrt{\frac{34}{20} - \left(\frac{20}{20}\right)^2} \times 10$
35	+20	2	2	12	
45	+30	3	3	9	$= \sqrt{0.7} \times 10 = 8.36$
				34	

उदाहरण : 8

निम्न समंकों से प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिये :

Temp. 'C' :	-40 to -30	-30 to -20	-20 to -10	-10 to 0	0 to 10	10 to 20	20 to 30
No. of days :	10	28	30	42	65	180	10

हल :

Temp.'C'	M.V.	No. of days	dev. From 5	ds (10)	fds	fd_s^2
-40 to -30	-35	10	-40	-4	-40	160
-30 to -20	-25	28	-30	-3	-84	252
-20 to -10	-15	30	-20	-2	-60	120
-10 to 0	-5	42	-10	-1	-42	42
0 to 10	5	65	0	0	0	0
10 to 20	15	180	10	+1	180	180
20 to 30	25	10	20	+2	20	40
Total		N=365			∑fds=-26	$\sum fd_s^2$ =794

नोट -ऋणात्मक पदों से विचलन लेते समय कल्पित माध्य जुड़ जाता हैं ; जैसे (-35-5) = - 40

$$S.D = i \times \sqrt{\frac{\sum fds^2}{N} - \left(\frac{\sum fds}{N}\right)^2} = 10 \times \sqrt{\frac{794}{365} - \left(\frac{-26}{365}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.18 - (-.07)^2} = 10 \times \sqrt{2.18 - .0049}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.1751} = 10 \times 1.475 = 14.75$$

उदाहरण : 9

शर्मीली तथा सुरैया के प्राप्तांक बी.कॉममें छः विषयों में निम्न हैं :

Sharmili	50	65	49	54	78	82
Suraiya	60	61	55	54	75	78

बताइय की कौन सी लड़की अपने अध्ययन में अधिक संगत हैं |

Computation of Coefficient of Variation

S.No	Marks of sharmili x	Deviations A=65dx	dx^2	Marks of Suraiya y	Deviations from A=61	dy^2
1.	50	-15	225	60	-1	1
2.	65	0	0	61	0	0
3.	49	-16	256	55	-6	36
4.	54	-11	121	54	-7	49
5.	78	+13	169	75	+14	196
6.	82	+17	289	78	+17	289
N=6	378	-11 $\sum dx$	1060 $\sum dx^2$	383	+17 $\sum dy$	571 $\sum dy^2$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum d^2 y}{N} - \left(\frac{\sum dy}{N}\right)^2} \; or \sqrt{\frac{571}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$\sqrt{176.67 - 3.36} \quad or \quad \sigma_x = 13.17 marks$$

$$CV = \frac{SD}{x} \times 100 or \frac{13.17}{63} \times 100 or \qquad 20.90\%$$

Or $\frac{934}{65.5} or 14.26\%$

Thus, it is clear that Suraiya in ore consistent in her performance

उदाहरण : 10

एक सम्भावित क्रेता व्यापारी अ तथा ब दो विक्रेताओं से प्राप्त पॉलिथीन बैग के नमूनों की भार वहन क्षमता का परीक्षण करता है । सम्बन्धित समंक निम्न प्रकार है :

Bursting Pressure in lbs.	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
No. of Bags from A	2	9	29	54	6
No. of Bags from B	9	15	30	32	14

बताइये की किस विक्रेता के बैगों मेन भार वाहन क्षमता की दृष्टि से अधिक एकरूपता हैं?

हल :

Bursting Pressure	M.V. X	dx (X-A)	$\frac{dx}{i}=(d'x)$	A			B		
				f	fd'x	Fd'^{2} x	f	fd'x	fd'^{2}x
5-10	7.5	-10	-2	2	-4	8	9	-18	36
10-15	12.5	-5	-1	9	-9	9	15	-15	15
15-20	17.5	0	0	29	0	0	30	0	0
20-25	22.5	+5	+1	54	54	54	32	32	32
25-30	27.5	+2	+10	6	12	24	14	28	56
Total				N=100	∑dx 53	∑dx^2 95	N=100	∑fdx 27	∑fd^{2}x 139

Company A	Company B
$\bar{x}=A+\frac{\sum fd'x}{N}\times i$	$\bar{x}=A+\frac{\sum fd'x}{N}\times i$
or $17.5+\frac{53}{100}\times 5=20.15$	or $17.5+\frac{27}{100}\times 5=18.85$
$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N}-\left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}\times i$	or $\sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N}-\left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}\times i$
or $\sqrt{\frac{95}{100}-\left(\frac{53}{100}\right)^2}\times 5$	or $\sqrt{\frac{139}{100}-\left(\frac{27}{100}\right)^2}\times 5$
or $\sqrt{(0.95-0.2809)\times 5}$	or $\sqrt{(1.39-0.0729)}\times 5$
or $\sqrt{0.6691}\times 5=4.09$	or $\sqrt{1.317\times 5=5.74}$
C.V=$\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100=\frac{4.09}{20.15}\times 100=20.3\%$	C.V$=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100=\frac{5.74}{18.85}\times 100=30.45\%$

क्योंकि A कम्पनी के थैलों की भार वहन क्षमता का विवरण गुणांक (20.3%) B कम्पनी के विचरण' गुणांक (30.45%) की तुलना में कम है अत: बैगों के भार वहन करने की क्षमता की दृष्टि से A कम्पनी के बैगों में अधिक एकरुपता है ।

4.13 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. अपकिरण को समझाइये । अपकिरण के माप की कौन-कौन सी' रीतियां हैं?

2. सांख्यिकी में प्रयुक्त अपकिरण शब्दावली की व्याख्या कीजिये । इसकी उपयोगिता स्पष्ट कीजिये ।
3. अपकिरण का क्या अर्थ है? अपकिरण के विभिन्न मापों के सापेक्ष गुण एवं दोषों की विवेचना कीजिये ।
4. अपकिरण माप की विभिन्न विधियां कौन-कौन सी हैं? इनमें से किसी एक विधि को उदाहरण सहित समझाइये ।
5. प्रदर्शित कीजिये कि अपकिरण माप किस प्रकार यह स्पष्ट करने में सहायक होता है कि आवृत्ति बंटनों के माध्य समान होते हुए भी उनकी रचना या बनावट में अन्तर हो सकता है । सांख्यिकी में अपकिरण माप कौनसी अन्य बातों में उपयोगी होते हैं?

व्यवहारिक प्रश्न

1. निम्न समंकों से मजदूरी का विस्तार कीजिए, (अ) मध्य के 50% श्रमिकों का (ब) के 80% श्रमिकों का इसके साथ ही चतुर्थक विचलन गुणांक भी ज्ञात कीजिए:

Wages less than	10	20	30	40	50	60	70
No. of workers	5	8	15	20	30	33	35

[*]Ans.(a) I.Q.R=25.15(b) P.R=48,Co-efficient of Q.D=0.374

2. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन ज्ञात कीजिये :

Size:	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Freq.	15	20	32	35	33	22	22	10	8

[*]Ans.Q_1=20,Q_3=23,Q.D=1.5 M=21, δ_M=1.726

3. निम्न वितरण से माध्य विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए :

Wage per day (Rs.):	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
No. of workers	3	8	17	36	20	12	5

[*]Ans.M=35.75,$\delta_{M=}$ 10.334, coeff.of δ_M =0.289

4. निम्न श्रेणी का विस्तार एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए:

Size:	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Frequency	5	8	10	12	9	7	6

[*]Ans. R=35, C.of R=0.778

5. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए :

Month	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	June	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Production (in tones)	439	440	440	441	441	442	442	443	443	444	444	445

[*]Ans .Q_1=440.25,Q_3=443.75,Q.D.=1.75,Coeff.ofQ.D.=0.004

6. निम्न से चतुर्थक विचलन गुणांक निकालिए-

Value	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frequency	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

[*]Ans. $Q_1=14, Q_3=17$, Coeff.of Q.D.=0.097

7. एक फुटबाल की श्रृंखला में टीम 'एं और 'बी' द्‌वारा किये गये गोलों की संख्या निम्न प्रकार है :

No. of Goals Scored in a Match	No. of Matches Played	
	Team A	Team B
0	27	17
1	9	9
2	8	6
3	5	5
4	4	3

Find which team is more consistent in its performance.

ज्ञात कीजिए की कौन -सी टीम की स्थिति अधिक संगतिपूर्ण हैं |

Ans: $\xi=1.057, \sigma=1.309$, c.v=123.84%B: $\xi=1.2 \sigma=1.308$, C.V. =109%

Hence : B item is more consistent.

8. Calculate standard deviation of the series given below and also tell which series has more deviation :

निम्न दो श्रेणियों का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए तथा बताइए की कौन सी श्रेणी में अधिक विचरणता है :

Weight in kg (below)	10	20	30	40	50	60	70
No. of Articles(A)	1	3	12	20	25	29	30
No. .of Ari\ticles (B)	1	4	11	19	26	29	30

Ans. $\xi=35, \sigma=13.663$, c.v=39.037%B $\xi=35, \sigma=13.663$, C.V.=39.037%

Hence both series have deviation

[*] तारांकित प्रश्न विभिन्न परिक्षाओं में पूछे जा चुके हैं |

इकाई-5

विषमता की अवधारणा एवं मापन

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य
5.1 विषमता का अर्थ
5.2 सममित एवं असममित वितरण
5.3 विषमता के प्रकार
5.4 विषमता के माप
5.5 विषमता मापने की रीतियाँ
  5.5.1 कार्ल पियर्सन का विषमता माप
  5.5.2 बाउले की विषमता माप
5.6 अपकिरण एवं विषमता में अन्तर
5.7 अभ्यासार्थ प्रश्न

5.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :-

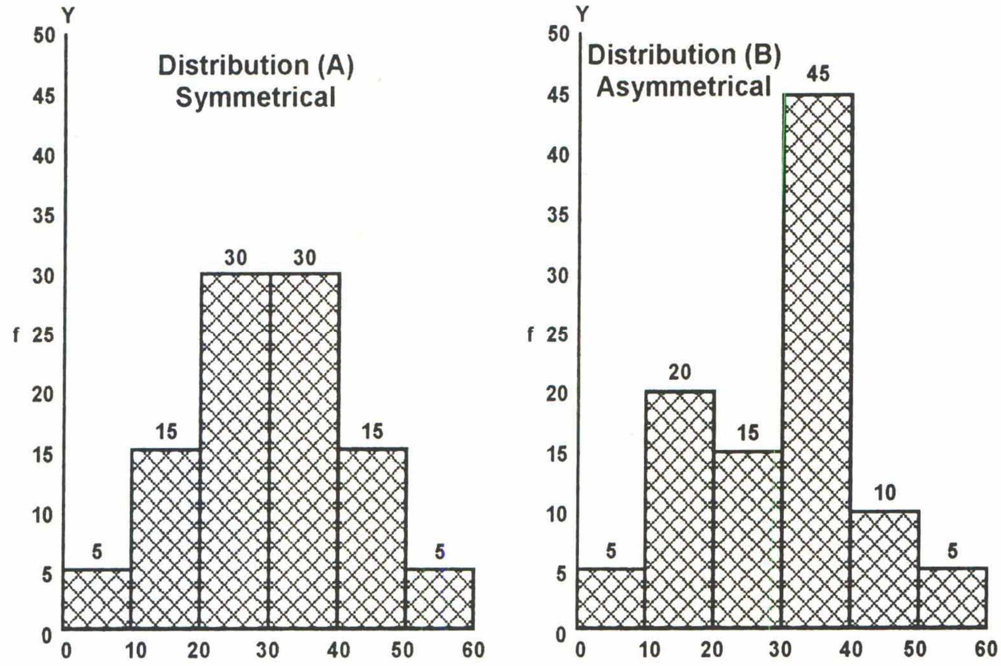
- विषमता को परिभाषित कर सकें ।
- विषमता का मापन कर सकें ।
- सममित एवं असममित वितरण में अन्तर स्पष्ट कर सकेंगे ।
- अपकिरण एवं विषमता में अन्तर स्पष्ट कर सकें ।

5.1 विषमता का अर्थ (Meaning of Skewness)

सांख्यिकी माध्य x M and Z etc. एवं अपकिरण के माप समक श्रेणी की महत्त्वपूर्ण विशेषताओ को प्रकट करते हैं, फिर भी ये समंक श्रेणी की बनावट एवं स्वरूप को नहीं बता पाते हैं कि समंक श्रेणी सममित (Symmetrical) प्रकृति की है अथवा असममित (Asymmetrical) प्रकृति की । इसी बात का पता लगाने की पूर्ति हेतु विषमता माप ज्ञात की जाती है । ' दूसरे शब्दों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक समंक माला के प्रतिनिधि मूल्य का निर्धारण करते हैं जबकि अपकिरण की माप समंक माला के बिखराव को बताती है । इनके विपरीत विषमता इस बात का उल्लेख करती है कि समंक माला का बिखराव मध्य बिन्दु के दोनों ओर समान रूप से वितरित है अथवा नहीं । व्यवहार में ऐसी अनेक समंक श्रेणियां देखने को मिल सकती है, जिनके मध्य प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणांक समान हो, फिर भी उनकी मूलभूत आकृति भिन्न हो ।

निम्नलिखित चित्र संख्या 1 में ऐसे दो वितरणों को दर्शाया गया है जिनके दोनों के समान्तर माध्य (ξ) प्रमाप विचलन (σ) तथा विचरण गुणांक (C.V) सभी एक समान हैं फिर भी एक वितरण सममित प्रकृति का है एवं दूसरा विषम या असममित प्रकृति का । अत: स्पष्ट है

कि किसी भी सांख्यिकीय वितरण का अध्ययन तब तक पूर्ण नहीं कहा जा सकता जब तक कि विषमता माप का विश्लेषण भी पर्याप्त रूप से नहीं कर लिया जाता है



चित्र संख्या 1

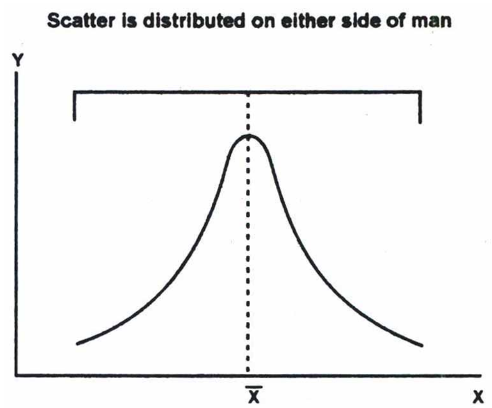
5.2 सममित एवं असममित वितरण

समंक श्रेणी का वह स्वरूप जिसमें विभिन्न चर मूल्य (Varieties)केन्द्रीय प्रवृत्ति माप के दोनों ओर समान या संतुलित रूप में बिखरे होते हैं, सममित श्रेणी कहलाती है जैसे -

Size	1	2	3	4	5	6	7
Frequency	10	14	24	40	24	14	10

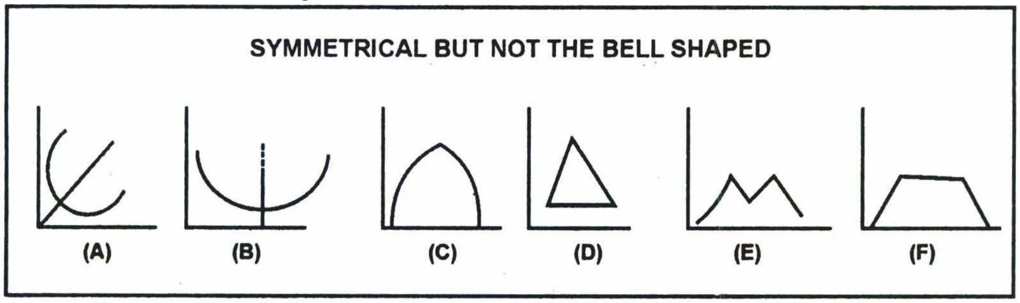
इन समंकों को यदि रेखाचित्र पर अंकित किया जाए तो जो चित्र बनेगा वह घण्टीनुमा (Bell shape) का होगा एवं इस आवृत्ति वक्र के सर्वोच्च बिन्दु से यदि आधार रेखा (Base line) पर लम्ब डाला जाये तो यह वह रेखा होगी जो श्रेणी के क्षेत्रफल को एक समान दो भागों में विभक्त करती है । ऐसे वितरण को सममित वितरण कहा जाता है एवं इसमें विषमता का पूर्ण अभाव माना जाता है ।

इस प्रकार के सममतीय वितरण में आकलित ξ M एवं Z तीनों का मूल्य बराबर होता है, तथा मध्यका (M) से दोनों चतुर्थकों (Q_1 एवं Q_3) का पारस्परिक अन्तर भी बराबर होता है । इस प्रकार के वितरण को चित्र सं. 2 में दर्शाया गया है



चित्र संख्या 2

सामान्यतया सममतीय वितरण की एक प्रमुख विशेषता यह होती है कि इसमें आवृत्तियां पहले एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक बिन्दु पर पहुंचने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है। परन्तु इस विशेषता से उसका सामान्य वितरण (घण्टीनुमा आकृति में) होना अनिवार्य नहीं है । अर्थात् सममतीय वितरण के कुछ अन्य सम्भावित स्वरूप निम्न प्रकार भी हो सकते हैं :--



चित्र संख्या 3

दूसरी ओर असममित बटन (Asymmetrical Distribution)वह वितरण होता है जिसमें आवृत्तिया जिस क्रम से बढ़ती है उसी कम से घटती नहीं है । अर्थात् केन्द्रीय प्रवृत्ति मूल्य के दोनों ओर एक समान आवृत्ति वितरण नहीं होता है । परिभाषिक रूप में भी यही कहा जाता है कि - "किसी वक्र की विषमता का अर्थ है कि वह सममित (Symmetrical) नहीं है ।" दूसरे शब्दों में विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप होता है जो किसी पदमाला की असममित (Asymmetrical) प्रकृति को स्पष्ट करता है ।

क्रॉक्सटन एवं काउडेन ने कहा है कि "जब एक श्रेणी सममित प्रकृति की न हो तो उसे असममित या वि कहा जाता है ।"

5.3 विषमता के प्रकार

विषमता मुख्य रूप से दो प्रकार की होती है :

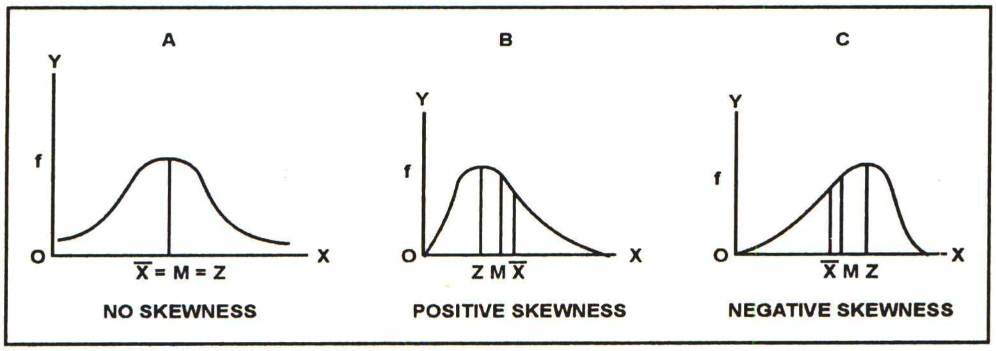
(A) धनात्मक विषमता (Positive skewness)

(B) ऋणात्मक विषमता (Negative skewness)

जहां तक संख्यात्मक गणनाओं का प्रश्न है, विषमता गुणांक (Co-efficient of skewness) का उत्तर यदि धनात्मक हो तो धनात्मक विषमता एवं ऋणात्मक उत्तर आने पर ऋणात्मक विषमता मानी जाती है ।

निम्न उदाहरण एवं चित्र संख्या 5 में सममतीय वितरण की एवं धनात्मक-ऋणात्मक विषमता की तुलनात्मक स्थिति को स्पष्ट रूप से दर्शाया गया है :-

X	Frequencies		
	A	B	C
0-20	5	14	4
20-40	10	20	8
40-60	15	12	12
60-80	20	8	16
80-100	15	6	16
100-120	10	4	24
120-140	5	2	40
Averages	ξ=M=Z	ξ>M>Z	ξ<M<Z
Partition values	(Q_3-M)(M=-Q_1)	(Q_3-M)>(M-Q_1)	(Q_3-M)>(M-Q_1)
Nature of Distribution	Symmetrical	Asymmetrical Skewed	



चित्र संख्या 4

5.4 विषमता के माप

विषमता माप भी दो प्रकार के हो सकते हैं :-

(i) निरपेक्ष माप Absolute Measure) (ii) सापेक्ष माप (Relative Measure)

निरपेक्ष माप से विषमता की कुल मात्रा का तथा उसके धनात्मक (+) या ऋणात्मक (-) होने का पता तो चल जाता है, परन्तु ये निरपेक्ष माप तुलना योग्य नहीं होते । इसीलिए निरपेक्ष माप में उपयुक्त आधार जैसे प्रमाप विचलन (σ) आदि का भाग देकर सापेक्ष माप की गणना की

जाती है जिसे विषमता गुणांक (co-effient of skewness)के नाम से जाना जाता है, तथा j संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है । श्रेणी का विषमता गुणांक जितना अधिक होगा श्रेणी उतनी ही अधिक वि होगी इसके विपरीत कम गुणांक होने पर आवृत्तियां कम विषम अथवा अधिक सममित होगी । साथ ही गुणांक धनात्मक होगा तो धनात्मक विषमता होगी और ऋणात्मक गुणांक होने पर ऋणात्मक विषमता होगी ।

5.5 विषमता मापने की रीतियां

(A) कार्ल पियर्सन का विषमता का माप

(B) बाउले का विषमता माप

5.5.1 (A) कार्ल पियर्सन का विषमता माप (Karl pearson's Measure of Skewness): यह माप चूंकि समंक श्रेणी के माध्यों (ξ M skewness) पर आधारित होता है, इसलिए इसे विषमता का प्रथम माप (frist measure of skewness) जाता है । एक वि या असममित श्रेणी में जहां ξ, M एवं Z का मूल्य बराबर नहीं होता है, श्रेणी में ξ तथा z में अंतर सर्वाधिक होता है । इसी मान्यता के आधार पर कार्ल पियर्सन ने विषमता माप का निम्न सूत्र प्रतिपादित किया है:-

निरपेक्ष माप Sk= ξ-Z

सापेक्ष माप Co-efficientof Skewness (j) $=\dfrac{\overline{X}-Z}{\sigma}$

इसकी सीमाएं ± 1 अर्थात् न्यूनतम -1 एवं अधिकतम +1 होती है ।

जब श्रेणी में अनिश्चितता या अस्पष्टता के कारण बहुलक का निर्धारण सम्भव न हो तब ξ एवं M का प्रयोग करके निम्न वैकल्पिक सूत्र द्वारा विषमता का माप किया जा सकता है :-

$$Sk = 3\left(\overline{X}-M\right) and \;\; j=3\left(\frac{\overline{X}-M}{\sigma}\right)$$

यहां विषमता गुणांक की सीमाएं± 3 है परन्तु व्यवहार में इसका मूल्य भी बहुत कम होता है ।

$$\left(\overline{X}-Z\right)=3\left(\overline{X}-M\right)$$

यहां विषमता गुणांक की गणना हेतु प्रमाप विचलन (σ)के स्थान पर माध्य विचलन (δ)का भी भाग दिया जा सकता है परन्तु माध्य विचलन की सीमाओं के कारण इसका प्रयोग उचित नहीं होता है ।

कार्ल पियर्सन विषमता माप को निम्न क्रियात्मक उदाहरणों द्वारा और अधिक स्पष्ट किया जा सकता है ।

व्यक्तिगत श्रेणो की दशा में

उदाहरण : 1

निम्न समंकों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिये :

100 120 150 110 130 150 180 140 150 170

हल :

यहां कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक की गणना हेतु पहले समान्तर माध्य (ξ) बहुलक (z)तथा प्रमाप विचलन (σ) ज्ञात करना होगा

Computation of ξ,Z and S.D

S.NO	Size	Deviation from A=150 (X	A)=dx	dx^2
1	100	-50		2500
2	120	-30		900
3	150	0		0
4	110	-40		1600
5	130	-20		400
6	150	0		00
7	180	+30		900
8	140	-10		100
9	150	00		00
10	170	+20		400
N=10		$\sum dx$=500=-100		$\sum dx^2$=6800

$$\bar{x} = A + \frac{\sum dx}{N} = 15 + \left(\frac{-10}{10}\right) = 14$$

बहुलक का मूल्य निरीक्षण द्वारा सबसे अधिक पुनरावृति होने वाला मूल्य 15 होगा |

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N.\sum d_x^2 - \left(\sum d_x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{10 \times 6800 - (-100)^2} = 24.08$$

$\therefore$ Co-efficient of skewness (i) = $\left(\frac{\overline{X} - Z}{\sigma}\right)$

Or = $\frac{140-150}{24.08} = \frac{-10}{24.08} = -0.415$

खण्डित श्रेणी की दशा में (In case of discrete series)

उदाहरण : 2

माध्य, बहुलक एवं प्रमाप विचलन के आधार पर कार्ल पियर्सन के विषमता माप की गणना कीजिये: **[*]**

X :	14.5	15.5	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5
f:	35	40	48	100	125	87	43	22

हल :

Computation of Mean, Mode and S.D.

X	f	Dev. from A = 18.5	fdx	fdx^2
14.5	35	-4	-140	560
15.5	40	-3	-120	360
16.5	48	-2	-96	192
17.5	100	-1	-100	100
18.5	125	0	0	0
19.5	87	+1	87	87
20.5	43	+2	86	172
21.5	22	+3	66	198
	N = 500		$\sum$fdx = -217	$\sum fd^2x$ = 1669

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fdx}{N} \;\; or \;\; 18.5 + \left(\frac{-217}{500}\right) = 18.5 - 0.434 = 18.066 \;\; or \;\; 18.07$$

निरीक्षण द्वारा सर्वाधिक आव त्ति 125 का मूल्य 18.5 बहुलक मूल्य होगा अर्थात Z = 18.5

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N.\sum fd^2x - \left(\sum fdx\right)^2} \quad \text{or} \quad = \frac{1}{500}\sqrt{500 \times 1669 - (-217)^2}$$

$$\text{Or} \quad = \frac{1}{500}\sqrt{834500 - 47089} \quad = \frac{1}{500}\sqrt{78411} = \frac{887.36}{500} = 1.775$$

Hence karl pearson's co-efficient of skewness(j) = $\left(\frac{\overline{X} - Z}{\sigma}\right)$

$$= \frac{18.07 - 18.5}{1.775} = \frac{-0.43}{1.775} = -0.242$$

अखण्डित या सतत श्रेणी की दशा में (In case of continuous series)

उदाहरण : 3

निम्न सारणी से अपकिरण गुणांक एवं कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक की गणना कीजिये : [*]

Per day income (Rs.)	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
No.of person	12	18	35	42	50	45	20	8

हल :

यहां प्रश्न में अन्य किसी सूचना के अभाव में अपकिरण गुणांक के लिए प्रमाप विचलन गुणांक ज्ञात करना होगा तथा कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक $\left(\frac{\overline{X} - Z}{\sigma}\right)$ के सूत्र से किया गया है :-

Per day income (in Rs.)	Mid value	No .of person f	Dev.from A=105 dx=(x-A)	Stepdev.(d,x) (dx/10)	Fd,(fdex'x)	Fd'x^2(fd'× xd'x)
70-80	75	12	-30	-3	-36	108
80-90	85	18	-20	-2	-36	72
90-100	95	35	-10	-1	-35	35
100-110	105	42f_o	0	0	0	0
110-120	115	50f_1	+10	+1	+50	50
120-130	125	45f_2	+20	+2	+90	180
130-140	135	20	+30	+3	+60	180
140-150	145	8	+40	+4	+32	128
		N=230			∑fd,x=125	∑fd'x^2=753

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times i = 105 + \frac{125}{230} \times 10$$ or 105+5.43=110.43

Z का मान ज्ञात करने हेतु पहले Modal group निर्धारित करना होगा जी निरीक्षण द्वारा 110-120 हैं |

$$z = L_1 + \frac{f_{1-} f_0}{2f_1 - f_2} \times i = 110 + \frac{50-42}{2 \times 50 - 42 - 45} \times 10$$

110+$\frac{80}{13} = 110 + 6.15 = 116.15$

$$\sigma = \frac{i}{N}\sqrt{N.\sum fd_x^2 - \left(\sum fd'x\right)^2} = \frac{10}{230}\sqrt{230 \times 753 - (125)^2}$$

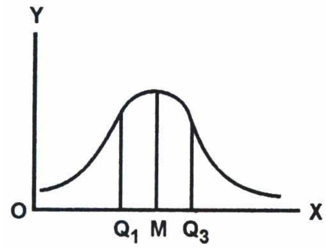
$$= \frac{1}{13}\sqrt{173190 - 15625}$$

$$= \frac{1}{23} \times 396.945 = 17.26$$

Co -efficient of standard deviation   Karl Pearson 's co - efficient of skewness

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{17.26}{110.43} = 0.156 \qquad j = \frac{\bar{x} - z}{\sigma} or \frac{110.43 - 116.15}{17.26} =$$

5.5.2(B) बाउले की विषमता माप (Bowley's measure of skwness): डी. बाउले द्वारा प्रतिपादित विषमता का यह माप मध्यका (M) तथा चतुर्थकों (Q_1andQ_3) पर आधारित होता है । इसीलिए यह विषमता का द्वितीय माप कहलाता है । इस माप की यह मान्यता है कि Q_1 जो 25% के बराबर है, Q_3 जो 7% के बराबर है, दोनों को जोड़ दें जो नें जो 50% के बराबर होता है के दुगुने के बराबर होना चाहिए । सूत्र रूप में - (Q_1+Q_3) = 2 or (Q_3=M)=(M-Q_1) जो कि एक सममतीय श्रेणी में तो होता ही है । जिसे निम्न चित्र सं. 5 में दर्शाया गया है-



चित्र संख्या 5

एक विषम या असममतीय श्रेणी में इनमें अन्तर होना स्वाभाविक है और यह अन्तर ही विषमता कहलाती है । तुलना की दृष्टि से इसका भी गुणांक निकाला जाता है । सूत्रानुसार -

$SkQ+(Q_3-M)-(M-Q_1)$ or Q_3+Q_1-2M

Bowley's Co-efficient of Skewness$(j_Q)=\dfrac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

बाउले के विषमता गुणांक का भी निर्वचन कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक की भांति ही किया जाता है । अर्थात् विषमता गुणांक धनात्मक होने पर धनात्मक विषमता तथा च्छ्णात्मक गुणांक होने पर ऋणात्मक विषमता होगी ।

इन गणनाओं को निम्न क्रियात्मक उदाहरणों द्वारा स्पष्टत: समझा जा सकता है:-

उदाहरण : 4

निम्न समंकों से बाउले के विषमता गुणांक की गणना कीजिये :

Roll No.	1	2	3	4	5	6	7
Marks	200	280	400	120	300	150	500

हल :

Calculate of median and quartites. अंकों को आरोही क्रम में जमाने पर :

Roll No.	1	2	3	4	5	6	7
Marks	120	150	200	280	300	400	500

$$M=\left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} item\left(\frac{7+1}{2}\right)=4^{th}\, item=280$$

$$Q_1=\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} item\left(\frac{7+1}{4}\right)=2^{nd}\, item=150$$

$$Q_3=3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} item=3\left(\frac{7+1}{4}\right)=6^{th}\, item=400$$

Bowley's coefficient of skewness.

$$jQ=\left(\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}\right)=3\frac{400+150-2\times 280}{400-150}=-\frac{10}{250}=-0.04:$$

उदाहरण : 5

निम्न आवृत्ति वितरण के लिए बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिये : [*]

No.of children per family	0	1	2	3	4	5	6
No. of families	7	10	16	25	18	11	8

हल :

Calculation of Bowley,s co-efficient of skewness N=95

No.of children per family (x)	0	1	2	3	4	5	6
No. of families (f)	7	10	16	25	18	11	8
C.F.	7	17	33	58	76	87	95

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} item = \frac{95+1}{4} = 24^{it} item$$ Hence Q_1=2

$$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} item = \frac{95+1}{4} = 72^{it} item$$ Hence Q_3 =4

$$M = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} item = \frac{95+1}{4} = 48^{it} item$$ Hence M=3

Bowley's co-efficient of skewness:-

$$\left(j_Q\right) = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{4+2-2\times3}{4-2} = \frac{0}{2} = 0$$

उदाहरण : 6

निम्न समंकों से अपकिरण एवं विषमता का चतुर्थक विचलन गुंणाक की गणना कीजिये:-

Marks	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
No. Of students	3	5	7	10	6	5	4

हल :

Calculation of median and quartiles

Marks	No. of student.	C.F
0-10	30	30
10-20	50	80
20-30	70	150
30-40	100	250
40-50	60	310
50-60	50	360
60-70	40	400
	N = 400	

$$m = Size\,of\left(\frac{N}{2}\right)th\ item = Size\ of\ \frac{400}{2} = 200th\ item \qquad Median\ Group = 30-40$$

$$M = L_1 + \frac{i}{F}(m-c) = or 300 + \frac{10}{10}(200-150) = 300+50 = 350$$

$$q1 = Size\ of\left(\frac{N}{4}\right)th\,item\,or\,size\,of\ \frac{400}{4} = 100th\,item \therefore First\ quartile\ group = 20-30$$

$$Now\,Q_1 = L_1 + \frac{i}{f}(q_1 - c) = 200 + \frac{10}{70}(100-80)\ or\ 200 + \frac{200}{7} = 200 + 28.6 = 228.6$$

$$Q_3 = Size\ of\ 3\left(\frac{N}{4}\right)th\,item\,or\,size\,of\ 3\left(\frac{400}{4}\right) = 300th\,item \therefore Third\ quartile\ group = 40-50$$

Quartile Co -efficient of Dispersion	Quartile Co -efficient of Skewness (j_Q)
$C.of\ Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$	$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 + Q_1}$
$= \frac{483.3 - 228.6}{483.3 + 228.6} = 0.358$	$= \frac{483.3 - 228.6}{483.3 + 228.6} = 0.047$

बाउले के विषमता माप का प्रयोग

जब मध्यका एवं चतुर्थकों की सहायता से विषमता मापनी हो तो इस बाउले के विषमता माप का प्रयोग किया जाता है । निम्न कुछ ऐसी परिस्थितियां हैं जिनमें बाउले के विषमता माप का ही प्रयोग किया जाता है :

(i) जब बहुलक का निर्धारण सम्भव नहीं हो ।

(ii) जब समंक श्रेणी में असमान वर्गान्तर है ।

(iii) जब समंक श्रेणी खुले सिरे (open end) की श्रेणी के रूप में हो ।

जब प्रश्न में स्पष्ट रूप से चतुर्थक विचलनों के आधार पर विषमता माप ज्ञात करने को कहा गया है या बाउले के विषमता माप के लिए कहा गया हो तो ही इस विधि को अपनाया जाना चाहिये अन्यथा स्पष्ट सूचना के अभाव में कार्ल पियर्सन का विषमता माप की ज्ञात की जानी चाहिये ।

उदाहरण : 7

(a) यदि किसी समूह का मध्यका 40 है एवं माध्य 48 है तो गणना करके बताइये कि समूह में ऋणात्मक विषमता है या धनात्मक ।

(b) यदि एक श्रेणी का समान्तर माध्य, बहुलक एवं प्रमाप विचलन क्रमश: 239, 29.। एवं 97 है तो इसका विषमता गुणांक क्या होगा ।

(c) निम्न मूल्यों से विषमता का चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना कीजिये :-
मध्यका =18.8, प्रथम चतुर्थक 14.6 एवं अन्तिम चतुर्थक 25.2

हल :

(a) Calculation of Karl Pearson's first measure of skwness =3(ξ-M)= 3(48-40)=+24:Positively skewed

(b) karl pearson's o-efficient of skewness(j)= $\left(\frac{\overline{X}-Z}{\sigma}\right)$

$$=\left(\frac{23.3-29.1}{9.7}\right)=\frac{-5.8}{9.7}=-0.598 \quad \therefore \text{Negatively skewed}$$

(c) $(jQ)=\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_{3-}Q_1}=\frac{25.+14.6-2\times 18.8}{25.2-14.6}=\frac{2.2}{10.6}=0.208$

5.6 अपकिरण एवं विषमता में अन्तर (Diference between dispersion and skewness)

क्र. स.	अन्तर का आधार	अपकिरण (Dispersion)	विषमता (skewness)
1	उद्देश्य	अपकिरण विश्लेषण का उद्देश्य समंक माला के विभिन्न पद मूल्यों की बनावट या बिखराव का अध्ययन करना होता है ।	जबकि विषमता विश्लेषण का उद्देश्य यह जांच करना होता है कि श्रेणी सममतीय प्रकृति की है अथवा असममतीय ।
2	आधार	अपकिरण माप द्वितीय श्रेणी के माध्यों पर आश्रित होते हैं ।	जबकि विषमता माप प्रथम एवं द्वितीय दोनों श्रेणी के माध्यों पर आश्रित होते हैं ।
3	परिघातों का प्रयोग	परिघातो का परिघातों का प्रयोग करने प्रयोग पर-- प्रथम द्वितीय एवं तृतीय । परिघातों के आधार पर अपकिरण मापा जा सकता है ।	जबकि विषमता के माप प्रथम एवं तृतीय परिघातों के आधार पर ही निकाले जा सकते हैं ।
4	विचरण की दिशा का ज्ञान	अपकिरण माप से पद मूल्यों का ज्ञान का माध्य से विचरण की दिशा का ज्ञान नहीं हो पाता है।	जबकि विषमता से माध्य के दोनों ओर के विचरण की जानकारी हो जाती है ।
5	परिणाम	अपकिरण के सभी माप प्राय: धनात्मक प्रकृति के होते हैं ।	जबकि विषमता गुणांक धनात्मक या ऋणात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं ।

5.7 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. विषमता को परिभाषित कीजिए?
2. विषमता एवं अपकिरण में भेद कीजिए?
3. विषमता मापने की बाउले विधि को समझाइये? इसका प्रयोग कब किया जाता है ।
4. विषमता की विभिन्न मापों का तुलनात्मक विश्लेषण कीजिए?

5. निम्न में अन्तर कीजिए :

(a) निरपेक्ष एवं सापेक्ष विषमता ।

(b) ऋणात्मक एवं धनात्मक विषमता |

व्यवहारिक प्रश्न

---

1. निम्नलिखित समंकों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	1500	2500	3000	7000	3000	2500	1500

Ans : Zero

2. निम्न समंकों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए

Roll No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Marks	0	15	55	75	88	60	45	30	10

[*] Ans : ξ=42,M=45,σ=25.61,j=-0.315

3. निम्न समंकों से प्रमाप विचलन कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

Size	120	240	360	480	600	720	840
Frequency	80	140	360	300	200	100	150

[*] Ans : ξ =477.29,Z=480,σ=197.13,ज=-0.014

4. निम्न आकड़ों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए

X (below)	5	10	15	20	25	30	35	40
Frequency	2	7	14	27	48	64	72	75

[*] Ans : ξ=21.9,Z=23.077,σ=8,j=-0.147

5. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए?

Central value	175	165	155	145	135	125	115	105
Frequency	11	32	40	64	52	36	16	4

[*] Ans :ξ=143,z=143.333,σ=16.10,j=-0.021

6. निम्न समंकों से मध्यका के आधार पर कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

Weights (in kg)	No. of packets	Weight (in kg)	No. of packets
0-10	5	50-60	30
10-20	6	60-70	36
20-30	8	70-80	50
30-40	10	80-90	60
40-50	25	90-100	70

[*] Ans.:ξ 70.933,M=76,σ=22.303,j=-0.682.

7. निम्न आकड़ों से कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

Class	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
Frequency	15	9	11	13	14	26	20	12

[*] Ans: ξ=48.333,Z = 61.667,σ=22.15j=-0.6.

8. बाउले विधि से विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

Marks more than	0	10	20	30	40	50	60	70	80
No.of student	240	215	200	180	165	145	115	50	0

[*] Ans: $Q_{1=}$ 30,Q_3 =68.462,M=58.333,j_Q =-0.473

9. निम्न सारणी से चतुर्थक अपकिरण गुणांक तथा बाउले का विषमता गुणांक का परिकलन कीजिए :

Central size	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequency	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

Ans :0.266and -0.074

10. निम्नलिखित सूचना से विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

Marks			Marks		
(a)	Mean	39.27	(b)	First Quartile	14.50
	Median	45.00		Third Quartile	24.92
	Standard Deviation	22.81		Median	18.73

[*] Ans: (a)j=-0.754,(b)j_Q =0.188

11. (i) किसी वितरण में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक +0.32, प्रमाप विचलन 6.5 तथा माध्य 29.6 है । बहुलक ज्ञातकीजिए ।

(ii) एक लगभग सममित बंटन का बहुलक तथा माध्य 32.55 तथा 35.4 हैं । मध्यका की गणना कीजिए ।

(iii) एक आवृत्ति बंटन में कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक तथा उसका विचरण गुणांक क्रमश: 0.4 तथा 30% है जबकि बहुलक 88 है । माध्य तथा मध्यका ज्ञात कीजिए ।

[*] Ans: (i) Z=27.52;(ii) M=34.45;(iii) ξ=100 and M=96

इकाई-6

सरल सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

6.1 सहसम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषा

6.2 सहसम्बन्ध निर्धारण की विधियाँ

6.2.1 रेखाचित्रीय विधियाँ

6.2.2 गणितीय रीतियाँ

6.3 अभ्यासार्थ प्रश्न

6.4 प्रतीपगमन विश्लेषण

6.5 सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर

6.6 प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य

6.7 प्रतीपगमन की व्यावहारिक गणना

6.8 अभ्यासार्थ प्रश्न

6.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप निम्नलिखित की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे-

- सहसम्बन्ध का अर्थ,
- सहसम्बन्ध के प्रकार,
- सरल रेखीय सहसम्बन्ध परिकलन की विधियाँ,
- सहसम्बन्ध के व्यावहारिक प्रश्नों का हल
- प्रतीपगमन का अर्थ तथा परिभाषा
- प्रतीपगमन समीकरण का परिकलन, तथा
- प्रदत्त समीकरण से विभिन्न मूल्यों को ज्ञात करना ।

6.1 सहसम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषा

सहसम्बन्ध ऐसी दो समंक मालाओं के बीच सम्बन्ध की व्याख्या है जिनमें कारण तथा परिणाम सम्बन्ध इस प्रकार से व्याप्त हो कि एक में परिवर्तन आने पर दूसरी श्रेणी के चरों में भी परिवर्तन दृष्टिगोचर होता हो । इस सम्बन्ध की सांख्यिकीय माप ही सह सम्बन्ध विश्लेषण का आधार है । इस माप पर विभिन्न विद्वानों के मत निम्न प्रकार हैं -

क्रॉक्सटन एवं काउडेन के अनुसार - "जब सम्बन्ध परिमाणात्मक प्रकृति का हो तो उस सम्बन्ध को खोजने एवं मापने का तथा एक सूक्ष्म सूत्र के रूप में व्यक्त करने के उचित सांख्यिकीय माध्य या उपकरण (tool) को सहसम्बन्ध के रूप में जाना जाता है ।

डेवनपोर्ट के अनुसार - "सहसम्बन्ध का सम्पूर्ण विषय उन पृथक विशेषताओं के बीच पाये जाने वाले अन्तर्सम्बन्ध को व्यक्त करता है जिसके अनुसार वे कुछ सीमा तक साथ-साथ परिवर्तित होने की प्रवृत्ति रखते है ।"

किंग (King) के मतानुसार - "यदि यह सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश दशाओं में दो चरमूल्य हमेशा एक ही दिशा में अथवा विपरीत दिशा में घटने बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो हम यह मानते हैं कि उनमें एक सम्बन्ध विद्‌यमान है । इस सम्बन्ध को ही सहसम्बन्ध कहा जाता है ।"

किंग ने ही अन्य शब्दों में यह भी कहा है कि "सहसम्बन्ध से आशय यह है कि दो श्रेणियों अथवा समंक समूहों के बीच कारण एवं परिणामस्वरूप मेलमिलाप या सम्बन्ध है ।"

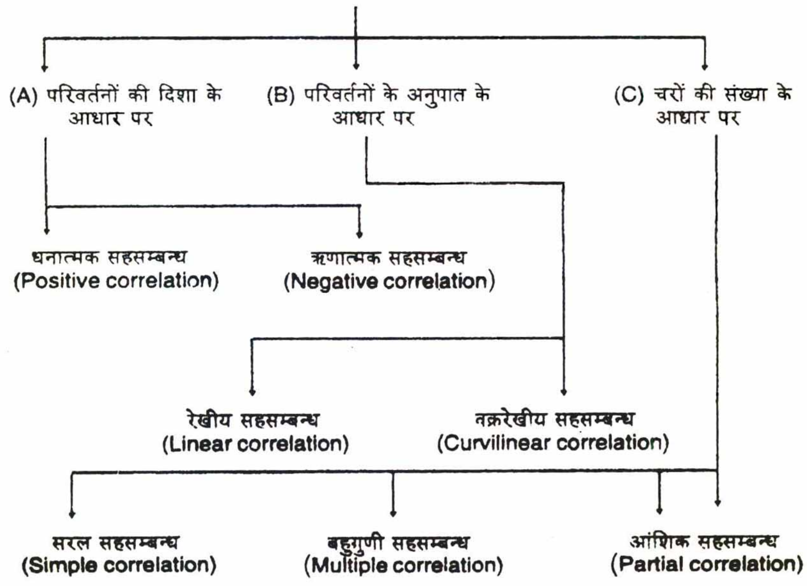
कॉनर के शब्दों में - "यदि दो या दो से अधिक परिमात्राए या संख्याएं सहानुभूति स्वरुप परिवर्तित हो जिससे एक में हुए परिवर्तन के फलस्वरूप दूसरे में परिवर्तन होता हो तो उन संख्याओं को सह सम्बन्धित कहा जाता है । "

उल्लेखनीय है कि कारण तथा परिणाम के सम्बन्ध तो हमेशा उन दोनों श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध को बताते ही है फिर भी कुछ ऐसी परिस्थितियां हो सकती है जिनमें कारण तथा परिणाम के सम्बन्ध व्याप्त नहीं होते हुए भी गणितीय सूत्र स्थापित करके सहसम्बन्ध माप की गणना कर ली जाती है । उस दशा में वह सहसम्बन्ध भ्रमात्मक (Spurious) या निरर्थक (Nonsense) सहसम्बन्ध माना जाता है ।

(A) परिवर्तनों की दिशा के आधार पर

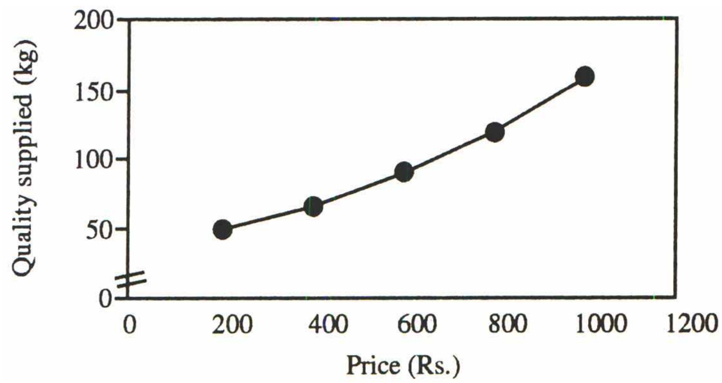
दो चर मूल्यों की श्रेणियों में परस्पर हुए परिवर्तनों की दिशा के आधार पर सहसम्बन्ध निम्न दो प्रकार का हो सकता है (i) धनात्मक या प्रत्यक्ष सहसम्बन्ध (Positive or direct correlation) (ii) ऋणात्मक या अप्रत्यक्ष सहसम्बन्ध (Negative or indirect corrlation) सहसम्बन्ध की इन दोनों स्थितियों का समुचित विवरण निम्न प्रकार है -

धनात्मक सहसम्बन्ध - जब दो चर मूल्यों की समकमालाओं में समान दिशा में परिवर्तन होता हो (जैसे एक चर मूल्य में वृद्धि होने पर उसके परिणामस्वरूप दूसरे चर में भी वृद्धि हो जाये अथवा एक चर मूल्य में कमी होने के परिणामस्वरूप दूसरे चर मूल्य में भी कमी हो जाये) तो ऐसी स्थिति में इन दोनों चर मूल्यों के बीच व्याप्त सम्बन्ध को धनात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है । मात्रा की दृष्टि से धनात्मक सहसम्बन्ध पूर्ण (perfect) अथवा सीमित मात्रा का हो सकता है । निम्नलिखित सारणी एवं चित्र 1 के द्‌वारा धनात्मक सहसम्बन्ध का निरुपण किया गया है:



Price per kg (X) (Rs.)	200	400	600	800	1000
Quantity supplied (Y)	50	65	90	120	160

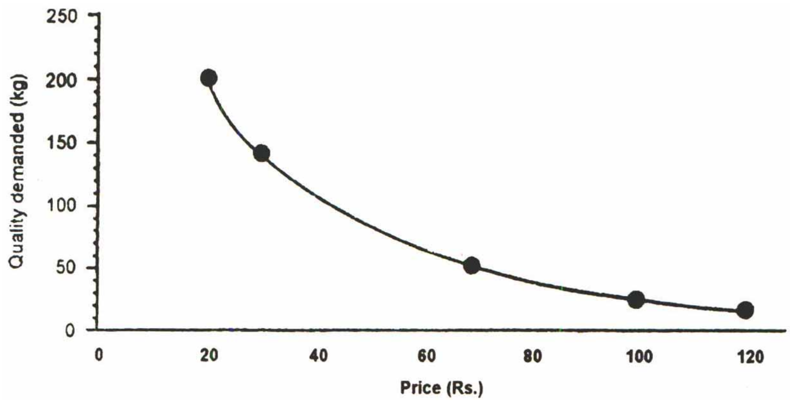
उपर्युक्त सारणी एवं **चित्र 1** में दर्शाये गये समंक धनात्मक सहसम्बन्ध को प्रकट करते हैं तथा सहसम्बन्ध रेखा का ढाल (slope) धनात्मक है किन्तु यह पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध की स्थिति नहीं है । वस्तुत: जब दो चर मूल्यों में समान आनुपातिक परिवर्तन आता है तो यह पूर्ण सहसम्बन्ध की स्थिति का प्रतीक होता है । **चित्र 1** में पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध का उल्लेख किया गया है ।



चित्र संख्या 1

ऋणात्मक सहसम्बन्ध - जब चर मूल्यों की दो समंक मालाओं में विपरीत दिशाई परिवर्तन होते हैं तो इन चर मूल्यों में व्याप्त सहसम्बन्ध को ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है । ऋणात्मक सहसम्बन्ध भी पूर्ण अथवा सीमित मात्रा का हो सकता है । प्रस्तुत सारणी एवं चित्र में ऋणात्मक सहसम्बन्ध को दर्शाया गया है : -

Price (Rs.)	20	30	70	100	120
Quantity demanded (kg)	200	140	50	23	15



चित्र संख्या 2

(B) परिवर्तनों के अनुपात के आधार पर

दो समंक मालाओं के विभिन्न पद मूल्यों में परस्पर आने वाले परिवर्तनों की दर अथवा अनुपात के आधार पर सहसम्बन्ध निम्न प्रकार का हो सकता है - (i) रेखीय सहसम्बन्ध (Linear correlation) (ii) अरेखीय या वक्ररेखीय सहसम्बन्ध (Non-linear or curvi-linear correlation) इन दोनों स्थितियों का समुचित विवरण निम्न प्रकार है -

रेखीय सहसम्बन्ध -जब एक श्रेणी के चरमूल्यों में आने वाले परिवर्तनों के प्रत्युतर में उससे सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के चर मूल्यों में एक निश्चित दर से परिवर्तन आते हैं तो ऐसे चर मूल्यों में व्याप्त सम्बन्ध को रेखोय सहसम्बन्ध कहा जाता है ।

अरेखीय या वक्र रेखीय सहसम्बन्ध -जब किसी समंक माला के चर मूल्यों में आने वाले परिवर्तन के प्रत्युतर में, उससे सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के चर मूल्यों में गैर आनुपातिक परिवर्तन आते हैं तो चर मूल्यों के बीच व्याप्त इस तरह के सम्बन्ध की स्थिति को वक्र रेखीय सहसम्बन्ध कहा जाता है । वस्तुत: अरेखीय सहसम्बन्ध की अवस्था में परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं रहता है तथा सहसम्बन्ध चित्र की प्रकृति वक्रीय होती है ।

(C) चरों की संख्या के आधार पर

इस आधार पर सहसम्बन्ध निम्न तीन प्रकार का हो सकता है -

(i) सरल सहसम्बन्ध

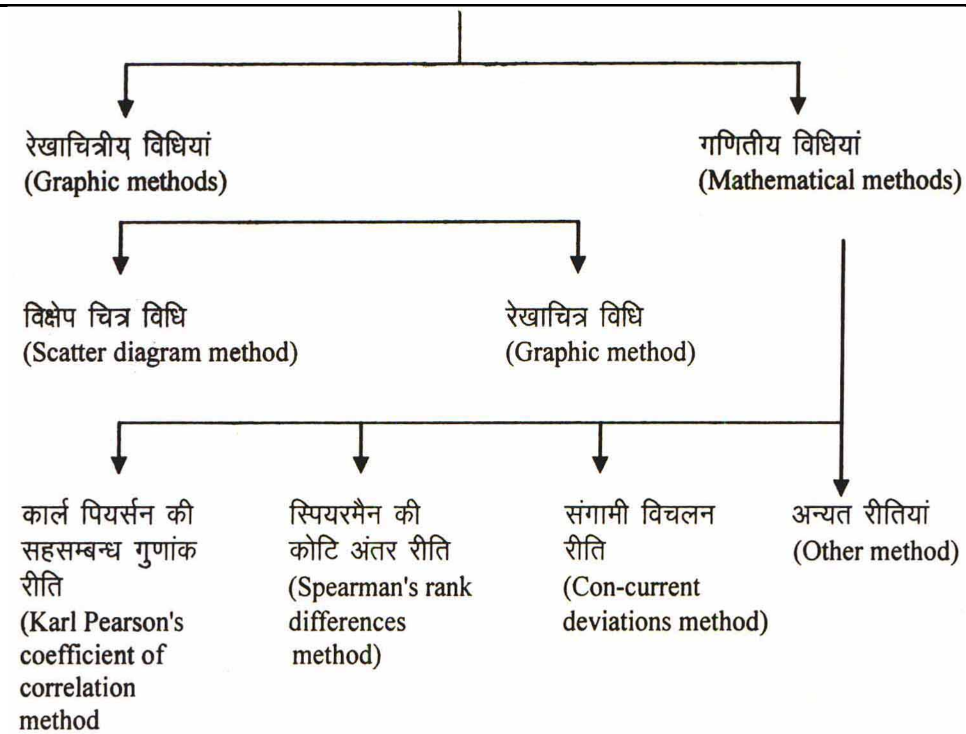
(ii) बहु गुणी सहसम्बन्ध

(iii) आशिक सहसम्बन्ध

जब दो चरों के बीच सहसम्बन्ध मापा जाता है जिनमें एक चर स्वतंत्र एवं दूसरा आश्रित चर होता है तो वह सरल सहसम्बन्ध कहलाता है । इसके विपरीत जब तीन या तीन से अधिक चरों के बीच सहसम्बन्ध मापा जाता है तो वह बहु गुणी सहसम्बन्ध कहलाता है, जैसे वर्षा, खाद की मात्रा एवं उपज में सहसम्बन्ध का माप । ठीक इसी तरह तीन अथवा तीन से अधिक दिये हुए चरों में से ही जब एक स्वतंत्र एवं दूसरे आश्रित चर मूल्य के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात करते समय अन्य स्वतंत्र चर मूल्यों को स्थिर मान कर इसके प्रभाव को निरस्त मान लिया जाता है तो वह आशिक सहसम्बन्ध कहलाता है जैसे वर्षा को स्थिर रखकर खाद की मात्रा एवं उपज में सम्बन्ध का माप आशिक सहसम्बन्ध कहलाता है ।

Types of correlation	Degree of Correlation				
	No correlation	Perfect correlation	Limited Degree Correlation		
			Low degree	Moderate degree	High degree
Posijtive correlation	0	+1	>0 but <.25	.25 and above but <.75	.75 and above but <1
Negetive correlation	0	-1	>0 but<- .25	-.25 and above but <-.75	-.75 and above but <-1

6.2 सहसम्बन्ध निर्धारण की विधियाँ

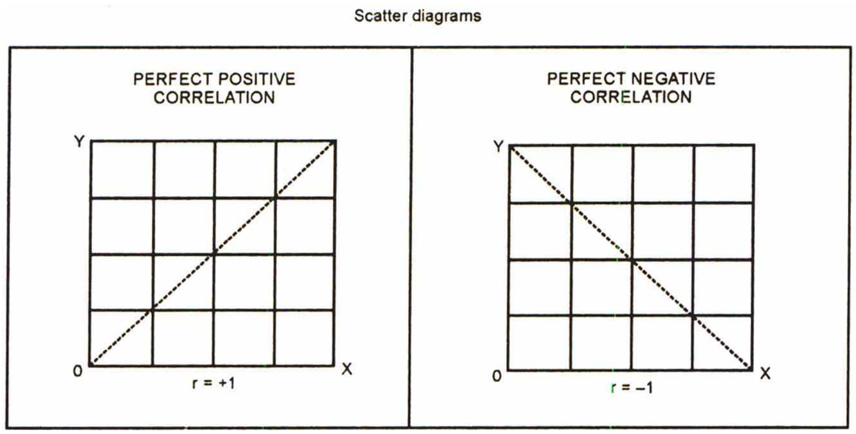


I. रेखाचित्रीय विधियां

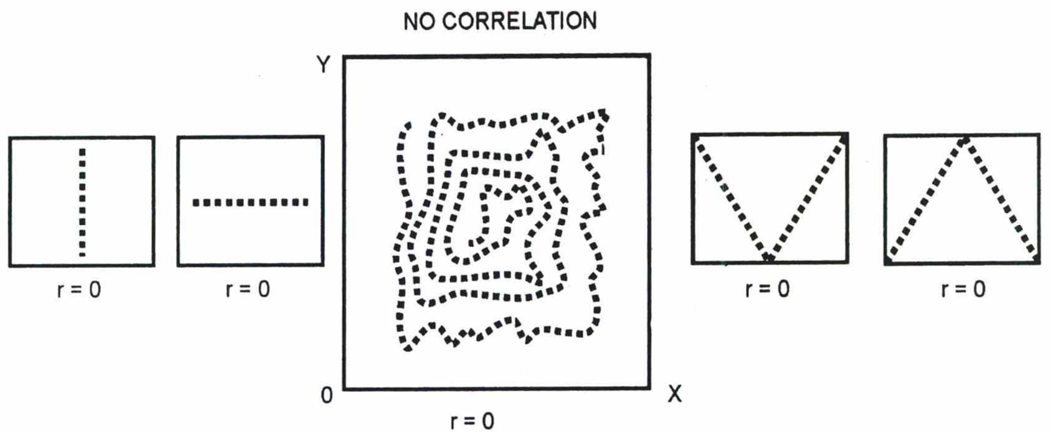
जैसा कि उपर्युक्त चार्ट में दर्शाया गया है, रेखाचित्रों का प्रयोग करके निम्न दो विधियों द्वारा दो चरों के बीच सहसम्बन्ध की दिशा एवं मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है :-

(a) विक्षेप चित्रों के माध्यम से : इस विधि के अन्तर्गत दिये हुए दो चरों में से स्वतंत्र चर मूल्यों को तो रेखाचित्र (Graph) के भुजाक्ष (X axis) पर तथा आश्रित चर मूल्यों को कोटि अक्ष (Y axis) पर प्राकित किया जाता है । इस प्रक्रिया को X तथा Y दोनों श्रेणियों के एक एक मूल्य के प्रत्येक पदयुग्म (Pair) के लिए लागू किया जाता है । फिर सभी पदयुग्मों के बिन्दु

प्राकित करने के पश्चात् जो चित्र बनता है वह विक्षेप चित्र कहलाता है जो एक निश्चित प्रवृति को प्रदर्शित करता है । विभिन्न प्रकार के विक्षेप चित्रों को नीचे चित्र सं. 3 तथा 4 में दर्शाया गया है।



चित्र संख्या 3



चित्र संख्या 4

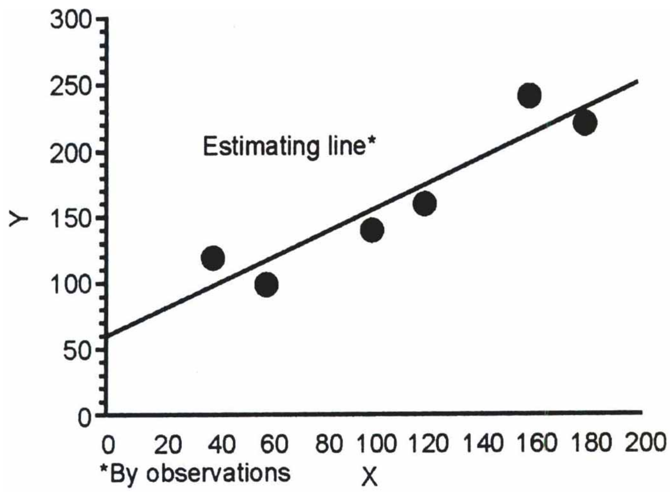
उदाहरण : 1

निम्न पदयुग्म X तथा Y चर मूल्यों से सम्बन्धित हैं -

X	120	60	40	100	180	160
Y	160	100	120	140	220	240

(a) उपर्युक्त समंकों से एक विक्षेप चित्र बनाइये ।

(b) क्या इन दोनों चर मूल्यों के बीच कोई सहसम्बन्ध है?



इस विक्षेप चित्र में Estimating line मुत हस्त (Freen hand) से इस प्रकार खींची गयी है कि वह लगभग सभी बिन्दुओं का प्रतिनिधित्व करें, किन्तु यहां यह उल्लेखनीय है कि यह रेखा विषयगत (Subjective) है । अगले अध्याय में इस प्रकार की रेखा का सृजन न्यूनतम वर्ग रीति से किया जायेगा जो एक वस्तुपरख (Objective) रेखा बनेगी । इस विक्षेप चित्र को देखने से निम्न निष्कर्ष निकलता है : (i) चूंकि सभी बिन्दु बाई तरफ निचले कोने से दाहिनी ओर ऊपरी कोने तक बढ़ते हुए क्रम में है इसलिए धनात्मक प्रकृति का सहसम्बन्ध है । (ii) चूंकि अधिकांश बिन्दु एक दूसरे के बहुत नजदीक है इसलिए उच्च मात्रा का भी सहसम्बन्ध प्रतीत होता है ।

सारांश में दोनों चर मूल्यों में उच्च मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

(b) बिन्दु रेखीय चित्रों के माध्यम से : इस विधि के अन्तर्गत रेखाचित्र में भुजाक्ष (X axis) पर तो दिये हुए समय (दिन, माह या वर्ष) स्थान या क्रम संख्या आदि को तथा कोटि अक्ष :(Y axis) पर दी हुई दोनों श्रेणियों (चरों) को प्राकित करते हुए दोनों चरों के अलग-अलग दो रेखाचित्र बना लिये जाते हैं फिर उन दोनों रेखाचित्रों की तुलना करके दोनों चरों के बीच सहसम्बन्ध की दिशा एवं मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है ।

6.2.2 II. गणितीय रीतियां

(a) कार्ल पियर्सन की सहसम्बन्ध गुणांक रीति (Karl Pearson's coefficient of correlation method) : बिन्दु रेखीय रीतियों से तो चरों के बीच सहसम्बन्ध की दिशा का ही बोध होता है सहसम्बन्ध के परिमाण या मात्रा का सही-सही अनुमान नहीं लग पाता है । गणितीय रीतियों में से भी कार्ल पियर्सन की सहसम्बन्ध गुणांक रीति सर्वाधिक प्रचलित है । इसका प्रमुख कारण यही है कि कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित सहसम्बन्ध गुणांक (जिसे r संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है) का सूत्र समान्तर माध्य (mean) तथा प्रमाप विचलन (Standard deviation) जो क्रमशः केन्द्रीय प्रवृति एवं अपकिरण के आदर्श माप है पर आश्रित है जो गणितीय माप को संतो रूप प्रदान करते हैं तथा गणितीय दृष्टि से इसमें पूर्ण शुद्धता पाई जाती है ।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's coefficient of correlation): अर्थात् r जिसकी गणना को आगे अलग-अलग श्रेणियों में विस्तार से समझाया गया है के मूल सूत्र निम्न प्रकार है -

(i) $r = \frac{Co-\text{var}\,iance of X \,\&\, Y}{\sigma_x \sigma_y}$ अथवा

(ii) $r = \frac{Co-\text{var}\,iance\ of\ X\ and\ Y}{\sqrt{VarianceX\ .VarianceY}}$ or $r = \frac{\sum dxdy}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}}$

उदाहरण : 2

निम्न आकड़ों से विवाह के समय पति एवं पत्नियों की आयु के बीच कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये :

Age of Husband	23	27	28	28	29	30	31	33	35	41
Age of wife	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

हल :

Calculation of Karl Pearson's coefficient of correlation (Direct Method)

Age of Husband (X)			Age of Wife (Y)			
Age in years X	Dev. From X=30.5 Dx= (X-X)	d^2X	Age In years Y	Dev. From Y=25 dy=(Y -Y)	d^2y	dxdy
23	- 7.5	56.25	18	- 7	49	52.5
27	- 3.5	12.25	20	- 5	25	17.5
28	- 2.5	6.25	22	- 3	9	7.5
28	- 2.5	6.25	27	+ 2	4	- 5.0
29	- 1.5	2.25	21	- 4	16	6.0
30	- 0.5	0.25	29	+ 4	16	- 2.0
31	+ 0.5	0.25	27	+ 2	4	1.0
33	+ 2.5	6.25	29	+ 4	16	10.0
35	+ 4.5	20.25	28	+ 3	9	13.5
41	+ 10.5	110.25	29	+ 4	16	42.0
$\sum = 305$ $N = 10$	$\sum dx = 0$	$\sum d^2x = 220.50$	$\sum y = 250$		$\sum d^2y = 164$	$\sum dxdy = 143$

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{305}{10} = 30.5 \quad , \quad \overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{250}{10} = 25$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum d_x^2}{N}} = \sqrt{\frac{220.5}{10}} = 4.6957 \quad , \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum d_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{164}{10}} = 4.0497$$

$$r = \frac{\sum dxdy}{N\sigma_x N\sigma_y} = \frac{143}{10 \times 4.6957 \times 4.0497} = \frac{143}{190.16} = 0.7519$$

वैकल्पिक सूत्र द्वारा -

$$r = \frac{\sum dxdy}{\sqrt{\sum d_x^2 \sum d_y^2}} = \frac{143}{\sqrt{220.5 \times 164}} = \frac{143}{190.16} = 0.7519$$

निर्वचन : उपर्युक्त सहसम्बन्ध गुणांक 0.7519 यह बताता है कि पति एवं पत्नियों की आयु के बीच उच्च मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध (High degree positive correlation) है।

यहां वैकल्पिक सूत्र में लघुगुणकों का प्रयोग करके गणन क्रिया को और आसान बनाया जा सकता है यथा -

$$r = \frac{143}{\sqrt{220.5 \times 164}} \text{ or } A.L\left[Log143 - \frac{1}{2}\left(Log220.5 + Log164\right)\right]$$

or $A.L(2.1553 - \frac{1}{2}(2.3434 + 2.2148) or (A.L(2.1553 - 2.2791)$

$= A.L(1.8762) or 0.7519$

लघु रीति (Short cut method) : जब दी हुई दो श्रेणियों में से किसी एक अथवा दोनों श्रेणियों का समान्तर माध्य पूर्णाक में न हो तो प्रत्यक्ष रीति द्वारा उस वास्तविक समान्तर माध्य से विचलन लेना गणन क्रिया को जटिल बना देता है । उस दशा में एक अथवा दोनों ही श्रेणियों में कल्पित माध्यों से विचलन लिये जाते हैं । यह विधि लघुरीति के नाम से जानी जाती है ।

वैकल्पिक रूप से बिना प्रमाप विचलन मान ज्ञात किये निम्न सूत्रों द्वारा भी सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जा सकती है :

(i) $$r = \frac{\sum dxdy - \left(\frac{\sum dx . \sum dy}{N}\right)}{\sqrt{\left[\sum d^2x - \frac{\left(\sum dx\right)^2}{N}\right]\left[\sum d^2y - \frac{\left(\sum dy\right)^2}{N}\right]}}$$

(ii) $$r = \frac{\sum dxdy - N \times \left(\frac{\sum dx}{N}\right)\left(\frac{\sum dy}{N}\right)}{Nx\sqrt{\left[\frac{\sum d_x^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2\right] \times \left[\frac{\sum d^2y}{N} - \left(\frac{\sum dy}{N}\right)^2\right]}}$$

(iii) $r = \dfrac{N \times \sum dxdy - \left(\sum dx.\sum dy\right)}{\sqrt{N \times \sum d^2x - \left(\sum dx\right)^2} \sqrt{N \times \sum d^2y - \left(\sum dy\right)^2}}$

(iv) $r = \dfrac{N \times \sum dxdy - \left(\sum dx \times \sum dy\right)}{\sqrt{\left[N \times \sum d^2x - \left(\sum dx\right)^2\right]\left[N \times \sum d^2y - \left(\sum dy\right)^2\right]}}$

उदाहरण : 3

उदाहरण संख्या 2 के समंकों का ही प्रयोग करते हुए पति एवं उनकी पत्नियों की आयु के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिये यदि गणनाओं के लिए लघु रीति अपनाई जाये ।

हल : Computation of coefficient of correlation

(Short cut method)

Age of Husband (X)			Age of Wife (Y)			dxdy
Age in years X	Dev. From X=30.5 dx=(X-X)	d^2x	Age of years Y	Dev. From Y=25 dy=(Y-Y)	d^2y	
23	- 6	36	18	- 9	81	54
27	- 2	4	20	- 7	49	14
28	- 1	1	22	- 5	25	5
28	- 1	1	27	0	0	0
29	0	0	21	- 6	36	0
30	+ 1	1	29	+ 2	4	2
31	+ 2	4	27	0	0	0
33	+ 4	16	29	+ 2	4	8
35	+ 6	36	27	+ 1	1	6
41	+12	144	29	+ 2	4	24
N=10	$\sum dx = 25 - 10 = 15$	$\sum d^2x = 243$	$\sum y = 250$	$\sum dy = 7 - 27 = 20$	$\sum d^2y = 204$	$\sum dxdy = 113$

वैकल्पिक सूत्रों से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना :

(1) प्रथम सूत्र का प्रयोग करने पर

$$r = \frac{\sum dxdy - N\left(\frac{\sum dx}{N}\right)\left(\frac{\sum dy}{N}\right)}{N \times \sqrt{\left[\frac{\sum d_x^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2\right] \times \left[\frac{\sum d^2y}{N} - \left(\frac{\sum dy}{N}\right)^2\right]}} \quad \text{or}$$

$$\frac{113-10\times\left(\frac{15}{10}\right)\left(\frac{-20}{10}\right)}{10\times\sqrt{\left[\frac{243}{10}-\left(\frac{15}{10}\right)^2\right]\times\left[\frac{204}{10}-\left(\frac{-20}{10}\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{113-(10\times1.5\times-2)}{10\times\sqrt{[24.3-2.25]\times[20.4-4]}}$$ or $$=\frac{113+30}{10\times4.696\times4.05}=\frac{143}{190.17}=0.7519$$

(2) द्वितीय सूत्र का प्रयोग करने पर

$$r=\frac{\sum dxdy-\left(\frac{\sum dx.\sum dy}{N}\right)}{\sqrt{\left[\sum d^2x-\frac{(\sum dx)^2}{N}\right]\left[\sum d^2y-\frac{(\sum dy)^2}{N}\right]}}$$ or

or $$=\frac{113-1\left(\frac{15\times-20}{10}\right)}{\sqrt{\left[243-\frac{(1520)^2}{10}\right]\times\left[204-\frac{(-20)^2}{10}\right]}}$$ or

$$=\frac{113+30}{\sqrt{\left[243-\frac{225}{10}\right]\left[204-\frac{400}{10}\right]}}=or=\frac{143}{\sqrt{220.5\times164}}=\frac{143}{190.16}=0.7519$$

(3) तृतीय सूत्र का प्रयोग करने पर

$$r=\frac{N\times\sum dxdy-(\sum dx.\sum dy}{\sqrt{N\times\sum d^2x-(\sum dx)^2}\sqrt{N\times\sum d^2y-(\sum dy)^2}}$$

Or $$\frac{10\times113-(15\times20)}{\sqrt{10\times243-(15)^2}\sqrt{10\times204-(-20)^2}}$$ or

$$=\frac{1130+300}{\sqrt{2205\times\sqrt{1640}}}=\frac{1430}{1901.73}=0.7519$$

(4) चतुर्थ सूत्र का प्रयोग करने पर

$$r=\frac{N\times\sum dxdy-(\sum dx.\sum dy}{\sqrt{\left[N\times\sum d^2x-(\sum dx)^2\right]\left[N\times\sum d^2y-(\sum dy)^2\right]}}$$ or

$$=\frac{10\times113-(15\times-20)}{\sqrt{10\times243-(15)^2\left[10\times204-(-20)^2\right]}}$$ or

$$= \frac{1130+300}{\sqrt{[2430-225][2040-400]}} = \frac{1430}{\sqrt{2205\times1640}} = \frac{1430}{1901.63} = 0.7519$$

स्पियरमैन की कोटि अंतर विधि (Spearman's Rank Differnces Method)

जब तथ्यों को प्रत्यक्ष संख्यात्मक रूप में मापा जाना संभव नहीं हो वरन् उन्हें एक निश्चित कम (Ranks) में रखा जा सकता है, जैसे बुद्धिमानी, कुशलता, अनुभव आदि गुणात्मक तथ्यों को प्रत्यक्ष रूप से अंकों में नहीं मापा जा सकता है, किन्तु उन्हें क्रम दिये जा सकते हैं कि सबसे अधिक सुन्दर को प्रथम फिर इससे कम सुन्दर को द्वितीय आदि । स्पियरमैन ने व्यक्तिगत श्रेणी में इन क्रम संख्याओं का ही अंतर लेकर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की यह रीति प्रतिपादित की है । इसीलिए इस विधि का नाम स्पियरमैन की कोटि अंतर रीति से जाना जाता है ।

इस रीति के अन्तर्गत सर्वप्रथम पदों या चरों को प्रत्येक श्रेणी में कम प्रदान किये जाते हैं। तत्सम्बन्धी क्रमों को अन्तर ज्ञात करके उनका वर्ग किया जाता है तथा वर्गों के योग को निम्न सूत्र में प्रयुक्त करके सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है ।

$$\text{Coefficient of Rank Correlation}\left(r_R\right) = 1 - \frac{6\left[\sum d^2\right]}{N\left(N^2-1\right)}$$

कभी-कभी श्रेणियों में सीधे ही क्रम दिये हुए होते हैं, ऐसी अवस्था में सीधे ही अन्तर का वर्ग एवं योग के प्रश्न को हल किया जा सकता है ।

समान कोटिक्रमों के लिए संशोधन (Correction for Tied Ranks) : जब समान कोटिक्रम दो या दो से अधिक पदों को दिये गये हो तो हल संख्या को दिये गये समानक्रमों के लिए उपर्युक्त सूत्र में प्रस्तुत $\sum d^2$ में निम्न संशोधन को और जोड़ना होता है : $\frac{1}{12}\left(m^3-m\right)$

यहां. m = वह संख्या श्रेणी में कितनी बार आयी है ।

यहां यह भी संभव है कि एक ही श्रेणी में भी एक से अधिक संख्याएं बार-बार आ सकती है ऐसी अवस्था में उपर्युक्त सूत्र में यह संशोधन X तथा Y दोनों श्रेणियों में समान क्रम पर आयी सभी संख्याओं के लिए जोड़ना होगा । सूत्रानुसार:-

$$\rho \text{ or } r_R = 1 - \frac{6\left[\sum d^2 + \frac{1}{12}\left(m^3-m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3-m\right)...\right]}{N\left(N^2-1\right)}$$

उदाहरण : 4

निम्न समंकों से कोई सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये

Rank I	1	5	4	3	2
Rank II	3	2	4	1	5

हल :

Rank I	Rank II	d	d^2
1	3	-2	4
5	2	+3	9
4	4	0	0
3	1	+2	4
2	5	-3	9
			26

$$=1-\frac{\left[\sum d^2\right]}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$=1-\frac{6\times 26}{5(25-1)}$$

$$=1-\frac{156}{120}=-0.3$$

उदाहरण : 5

दो चरों के सम्बन्ध में दिये गये निम्न समंकों से कोटि सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये:

X	40	80	60	50	90
Y	10	15	25	20	40

हल :

X	Y	R_1	R_2	d	d^2
40	10	5	5	0	-
80	15	2	4	- 2	4
60	25	3	2	+ 1	1
50	20	4	3	+ 1	1
90	40	1	1	0	6

$$=1-\frac{6\left[\sum d^2\right]}{n\left(n^2-1\right)}$$

$$=1-\frac{6\times 6}{5(25-1)}$$

$$=1-\frac{36}{120}=+0.7$$

उदाहरण : 6

निम्न तथ्यों की सहायता से क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक (rank coefficient of correlation) परिकलन कीजिए :

S.No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rank Differences (D)	-4	-2	+3	-1	0	+2	7	+3	-2	+3

[Adapted : C.A. Inter]

हल :

यह विदित है कि कोटि क्रमान्तरों का योग हमेशा शून्य होता है, अत: -4 -2 +3 -1 +0 +2 +x +3 - 2 +3=0; or 2 +x = 0 so x =-2 अत: अज्ञान कोटि क्रमान्तर -2 है ।

D	-4	-2	+3	-1	0	+2	-2	+3	-2	+3	Total
D^2	16	4	9	1	0	4	4	9	4	9	$60\left(\sum d^2\right)$

$$r_{(R)}=1-\frac{6\sum d^2}{N\left(N^2-1\right)}=1\frac{6\times 60}{10\left(10^2-1\right)}=1-\frac{360}{990}=\frac{990-360}{990}=\frac{630}{990}=0.636$$

उदाहरण : 7

निम्न समंकों का परीक्षण करके बताइए क्या यह सही है, यदि कुछ गलती है तो उसका सुधार करके कोटि सहसम्बन्ध गुणांक का आकलन कीजिए :

X-Series	20	22	24	25	30	32	28	21	26	35
Rank Differences (D)	+1	-2	+1	+11	-4	-6	0	+7	+2	0

[Adapted: ICWA]

हल :

प्रश्न में कोटि क्रमों का योग +10 है जो शून्य होना चाहिये था । कोटि क्रमान्तरों का योग करते हैं तो +10 आता है जबकि यह कोटि क्रमान्तरों में +10 की त्रुटि है । निरीक्षण से यह ज्ञात होता है कि N=10 है, तथा उच्चतम कोटि 10 हो दी जा सकती है तथा न्यूनतम कोटि एक की होगी । अत: 11 कोटि क्रमान्तर अशुद्ध है तथा कोटि योग शून्य के बराबर करने के लिए यहां +1 होना चाहिए । अत: =11 के स्थान पर =1 होगा ।

D (Given)	+1	-2	+1	+1	-4	-6	0	+7	+2	0	0 $\left(\sum D\right)$
D^2	1	4	1	1	16	36	0	49	4	0	112 $\left(\sum D^2\right)$

$$r_{(R)} = 1-\frac{6\sum d^2}{N\left(N^2-1\right)} or 1-\frac{6\times 112}{10\left(10^2-1\right)} or -1\frac{672}{990}=\frac{990-672}{990} or \frac{318}{990}=0.32$$

उदाहरण : 8

विद्‌यार्थियों द्‌वारा इतिहास एवं अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं । कोटि अंतर सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये:

Roll No.	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
Marks obtained in History	45	85	65	40	40	50	90	80	75	40
Marks obtained it Economics	35	80	70	40	30	60	70	95	80	32

हल :

चूंकि यहां इतिहास में प्राप्तांक जिसे Xseries माना है में 40 तीन बार आया है तथा अर्थशास्त्र में प्राप्तांक जिसे Y series माना है में 80 और 70 दो बार आये हैं, अत: सूत्र में संशोधन तीनों संख्याओं के लिए तीन बार करना होगा परन्तु 40 चूंकि तीन बार आया है इसलिए m = 3 series होगा व अन्य दोनों संख्याएं दो बार आने के कारण m = 2 व 2 होगा ।

Calculation of coefficient of Rank Correlation

Roll No.	Marks in History (X)	Rank (R_1)	Marks in Economics (Y)	Rank (R_2)	D(R_1-R_2)	D^2
101	45	7	35	8	- 1	1
102	85	2	80	2.5	- 0.5	0.25
103	65	5	70	4.5	0.5	0.25
104	40	9	40	7	2	4
105	40	9	30	10	- 1	1
106	50	6	60	6	0	0
107	90	1	70	4.5	- 3.5	12.25
108	80	3	95	1	2	4
109	75	4	80	2.5	1.5	2.25
110	40	9	32	9	0	0
N=10					$\sum D = 0$	$\sum D^2 = 25$

$$r_{(R)} = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right) + \frac{1}{12}\left(m^3 - m\right)\right]}{10\left(10^2 - 1\right)}$$

$$or = 1 - \frac{6\left[25 + \frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right) + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right)\right]}{10\left(10^2 - 1\right)}$$

$$or = 1 - \left(\frac{168}{990}\right) = 0.83 \qquad or = 1 - \left(\frac{168}{990}\right) = 0.83$$

संगामी विचलन रीति

जब हमें दो समकमालाओं के बीच सहसम्बन्ध की दिशा का ही ज्ञान प्राप्त करना हो तो मात्रा का नहीं तो बिन्दुरेखीय रीति के अतिरिक्त यह रीति भी उपयुक्त ,रहती है । इस विधि के अंतर्गत X तथा Y दोनों श्रेणियों में प्रत्येक मूल्य की उससे पिछले मूल्य की तुलना में वृद्धि या कमी के विचलन की दिशा अर्थात् + या - ज्ञात करना होता है फिर उन $\pm$। चिन्हों की सहायता से अत्यकालीन उच्चावचनों (Short time oscilliations) में सहसम्बन्ध ज्ञात हो जाता 'है । यदि विचलनों के ये. चिन्ह अधिकतम धनात्मक (+) हो तो इसका आशय यह है कि X तथा Y दोनों श्रेणियों. के वक्र एक़ ही दिशा हैं साथ-साथ गमन करते हैं अर्थात विचलन संगामी (Concurrent) है तो उस दशा में दोनों श्रेणियों के बीच धनात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है । इसके विपरीत जव अधिकतम ऋणात्मक (-) चिन्ह हो तो वे यह बताते है कि दोनों श्रेणियों के विचलन प्रतिगामी (Divergent) हैं अर्थात् दोनों श्रेणियों ने वक्र विपरीत दिशा में गमन करते हैं तो दोनों श्रेणियों के बीच ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है ।

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2C-n}{n}\right)}$$

उदाहरण : 9

संगामी विचलन रीति का प्रयोग करते हुए निम्न संमको से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये।

Year	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
X values	50	80	60	60	72	85	88	88	55	70
Y values	80	70	50	55	62	80	85	85	88	90

हल :

Computation of correlation coefficient of cincurrent deviations.

Year	Series X		Series Y		Product of Signs
	X Values	Deviation Sign $\pm$	Y Values	Deviation Sign $\pm$	
1995	50		80		
1996	80	+	70	-	-
1997	60	-	50	-	+
1998	60	=	55	+	-
1999	72	+	62	+	+
2000	85	+	80	+	+
2001	88	+	85	+	+
2002	88	=	85	=	+
2003	55	-	88	+	-
2004	70	+	90	+	+
	N = 10	n = 9			C=6

$$r_c \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2C-n}{n}\right)} or \pm\sqrt{\pm\frac{(2\times 6)-9}{9}} = +\sqrt{+\frac{3}{9}} = +\sqrt{+0.333} = +0.58$$

अत: दोनों श्रेणियों में मध्यम मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध (Moderate degree of positive correla. tion) है ।

6.3 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. सहसम्बन्ध की परिभाषा दीजिये और सांख्यिकीय विश्लेषण में उसकी महता का विवेचन कीजिये । क्या वह सदा दो चर मूल्यों के मध्य कारण परिणाम को व्यक्त करता है?

2. सहसम्बन्ध की अवधारणा के अर्थ तथा महत्त्व की व्याख्या कीजिये । इस गुणांक के निर्वचन के लिए सामान्य नियमों का उल्लेख कीजिये ।
3. सहसम्बन्ध का क्या अर्थ है? धनात्मक व ऋणात्मक सहसम्बन्ध में अंतर कीजिये । केवल विक्षेप चित्रों की सहायता से आशिक, ऋणात्मक व पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध प्रदर्शित कीजिये ।
4. सहसम्बन्ध गुणांक से आप क्या समझते हैं? सिद्ध कीजिये कि सहसम्बन्ध गुणांक - 1 एवं + 1 के बीच होता है ।
5. सहसम्बन्ध की अवधारणा का महत्त्व एवं प्रयोग को समझाइये । सहसम्बन्ध निर्धारित करने की विभिन्न विधियों को समझाइये ।
6. कारण तथा परिणाम के सिद्धान्त को समझाइये । सहसम्बन्ध किन परिस्थितियों में निरर्थक होता है?
7. सहसम्बन्ध को परिभाषित कीजिये । कोटि सहसम्बन्ध ज्ञात करने की विधि को समझाइये ।
8. रेखाचित्र द्वारा आप सहसम्बन्ध किस प्रकार निर्धारित करेंगे । सहसम्बन्ध मापने की रेखाचित्र विधि एवं विक्षेप चित्र विधि में अन्तर बताइये ।
9. संगामी विचलन रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की विधि को समझाइये ।
10. निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणियां लिखिये.
    (i) विक्षेप चित्र
    (ii) रेखीय तथा वक्रेखीय सम्बन्ध
    (iii) सम्भाव्य विभ्रम
    (iv) प्रमाप विभ्रम
    (v) विलम्बना एवं अग्रगमन
    (vi) निश्चयन गुणांक

व्यवहारिक प्रश्न

---

1. निम्न समंकों को प्रदर्शित करने हेतु विक्षेप चित्र बनाइये तथा चरों के बीच सहसम्बन्ध के प्रकार एवं परिमाण पर भी टिप्पणी कीजिये ।[*]

X :	15	18	30	27	25	23	30
Y :	7	10	17	16	12	13	9

2. निम्न समंकों से एक्स तथा वाई के बीच सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये.

X :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y :	9	8	10	12	11	13	14	16	15

[*]ANS : r=0.95

3. निम्न समंकों से विनियोजित पूंजी तथा अर्जित लाभ में कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये:

Capital invested ('000) Rs :	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
Profit earned ('000) Rs:	30	22	20	14	15	10	5	8	4	2

[*]ANS : r=0.9615

4. निम्न सारणी से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये

	Series X	Series Y
Number of items	7	7
Arithmetic mean	4	8
Square of deviation from arithmetic mean	28	76
Summation of products of deviations of X and Series feom their respective mean	46	

[*]ANS :r =0.997

5. निम्नलिखित समंकों से कोटि क्रमान्तर रीति द्वारा सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये

X :	50	81	80	60	70	95	88	75
Y :	100	142	140	110	115	150	134	120

[*]ANS : r_R = +0.93

6. किसी पाठ्यक्रम के प्रशिक्षण से पूर्व एवं पश्चात् 10 व्यक्तियों को निम्न क्रमांक दिये गये । स्पियरमैन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये :

Individual:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ranks before training:	9	6	3	1	4	2	7	0	8	5
Ranks after training:	7	8	3	6	10	1	5	9	4	2

[*]ANS :r_R =+0.93

7. एक अभिरूचि परीक्षण में दो निर्णायकों ने 10 प्रत्याशियों को निम्न कोटिक्रम प्रदान किये :

Candidate :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Judge First :	7	8	3	1	2	6	9	4	10	5
Judge Second :	8	9	6	7	5	4	10	1	3	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिये ।

[*] ANS : r_R=0.224

6.4 प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)

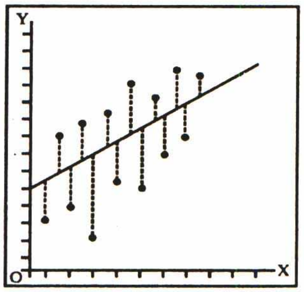
वस्तुतः प्रतीपगमन विश्लेषण दो चर मूल्यों की समंक मालाओं में औसत सम्बन्ध की व्याख्या करता है । प्रतीपगमन सिद्धान्त का उल्लेख सर्वप्रथम प्रो. गाल्टन ने किया था । जब गाल्टन अनुवांशिकता के संदर्भ में अपना शोध अध्ययन कर रहे थे तब उन्होंने पाया कि पुत्र की आयु औसत रूप से अपने पिताओं की आयु पर आश्रित न होकर औसत की ओर जाने की प्रवृत्ति

रखती है । इस प्रवृत्ति को उन्होंने प्रतीपगमन भ्रान्ति की संज्ञा प्रदान की । आगे चलकर इस विश्लेषण का आर्थिक एवं व्यवसायिक निर्णयन के व्यापक प्रयोग हुआ ।

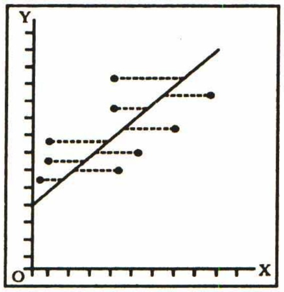
सरल प्रतीपगमन विश्लेषण के अन्तर्गत हम दो प्रतीपगमन समीकरणों या रेखाओं का सृजन करते हैं । एक समीकरण पर Y के लिए तो दूसरी प्र के लिए सृजित की जाती है । समीकरण X ony का प्रयोग X से सर्वोत्तम मूल्यों का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है जबकि Y का इकाई मूल्य दिया हुआ हो । ठीक इसी प्रकार y on x प्र प्रतीपगमन हमें "y" के सर्वोत्तम अनुमानित मूल्यों का आभास कराती है जबकि x का इकाई मूल्य दिया हुआ हो । उल्लेखनीय है कि एक ही समीकरण के द्वारा x तथा y मूल्यों का अनुमान नहीं लगाया जा सकता क्योंकि प्रतीपगमन समीकरण जिन मान्यताओं पर आश्रित हैं, वे इस बात को स्पष्ट करती हैं कि x तथा y के सर्वोत्तम मूल्यों का अनुमान लगाने के लिए दो अलग-अलग समीकरणे बनाई जाते हैं, इसके दो कारण हैं :-

(i) जब x on y प्रतीपगमन समीकरण का सृजन किया जाता है तब हम x को आश्रित तथा y को अनाश्रित चर माना जाता है । ठीक इसी प्रकार जब y on x प्रतीपगमन समीकरण का सृजन किया जाता है तब y को आश्रित तथा x को अनाश्रित चर माना जाता है ।

(ii) प्रतीपगमन विश्लेषण समानान्तर माध्य के "न्यूनत्त वर्ग" गुण पर आश्रित है । जब x on y समीकरण का प्रयोग किया जाता है तब हम $(x\text{-}x)^2$ अर्थात् क्षैतिज विचलनों के वर्गो को न्यूनतम किया जाता है जबकि y on x का सृजन करते समय $(y\text{-}y)^2$ अर्थात् लम्बवत विचलनों के वर्गो को न्यूनतम किया जाता है । स्पष्टतया दो पृथक समीकरणों की आवश्यकता होती है यह तथ्य निम्न चित्रों से स्पष्ट किया जा सकता है।



$\Sigma(Y - Y_c)^2$ is minimum



$\Sigma(Y - Y_c)^2$ is minimum

6.5 सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर

यद्यपि ये दोनों विश्लेषण परस्पर सम्बन्धित है, तथापि दोनों में कुछ महत्त्वपूर्ण अन्तर है :

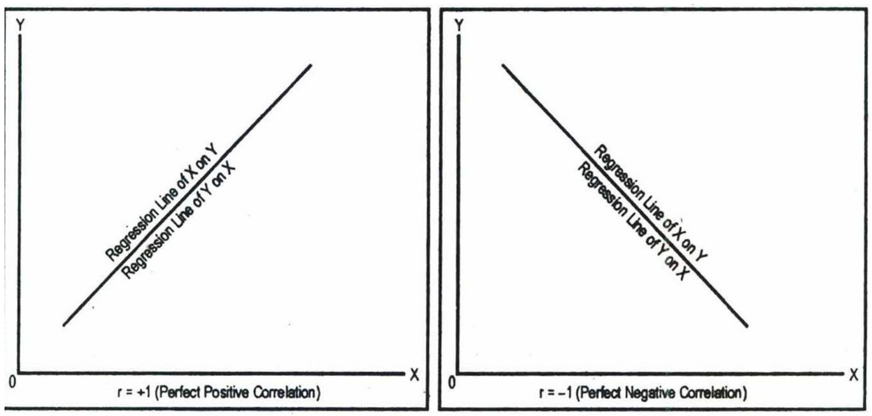
1. सहसम्बन्ध हमें बतलाता है कि दो श्रेणियों में किस प्रकार (अर्थात् धनात्मक अथवा ऋणात्मक) और कितनी मात्रा का सहसम्बन्ध है । इसमें एक श्रेणी के किसी मूल्य के आधार पर दूसरी श्रेणी के तत्सम्बन्धी मूल्य का सर्वोत्तम अनुमान नहीं लगाया जा सकता है, जबकि यह अनुमान प्रतीपगमन द्वारा सम्मव है ।

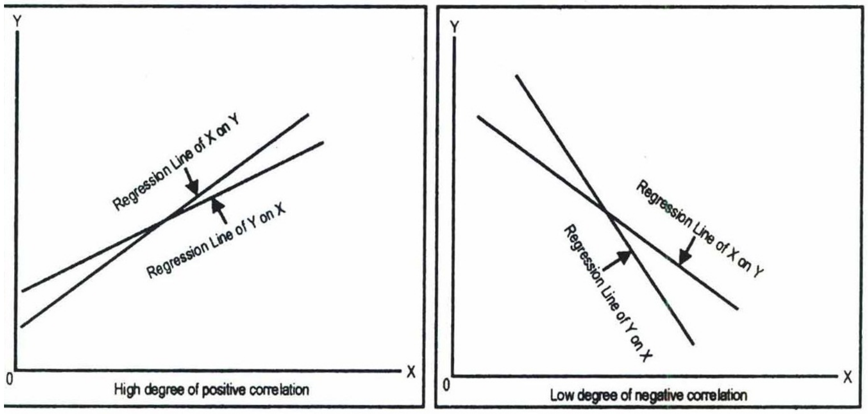
2. सहसम्बन्ध की दशा में पैमाने तथा मूल बिन्दु में परिवर्तन करने पर सहसम्बन्ध गुणांक अप्रभावित होता है, जबकि प्रतीपगमन गुणांक अनुमाप में आने वाले परिवर्तन से प्रभावित होती है । यही कारण है कि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करते समय यदि कोई संख्या उभयनिष्ठ ली गई है तो उसके समायोजन की आवश्यकता नहीं होती है परन्तु प्रतीपगमन गुणांक की दशा में इसकी आवश्यकता होती है ।
3. सहसम्बन्ध गुणांक एक सापेक्ष माप होता है, जो इकाई से स्वतंत्र होता है, तथा यह ± 1 के मध्य होता है । जबकि इसके विपरीत प्रतीपगमन गुणांक निरपेक्ष होते हैं, जो स्वतंत्र व आश्रित चर मूल्य की इकाई द्वारा निर्धारित होते हैं, जिनकी कोई सीमा नहीं होती है ।

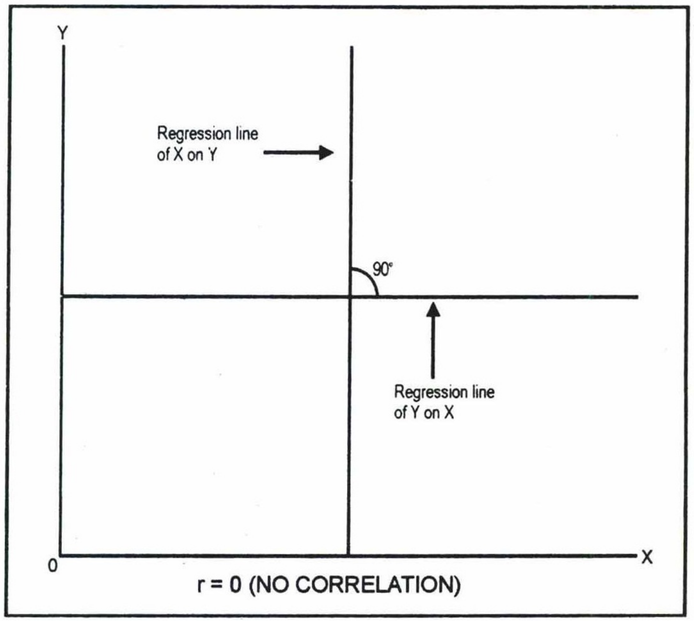
6.6 प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य

(i) सर्वोत्तम अनुमान लगान : प्रतीपगमन रेखाओं अथवा समीकरणों से एक चर के दिये हुए इकाई मूल्य के संदर्भ में दूसरे चर का सर्वोत्तम अनुमानित औसत मूल्य ज्ञात किया जा सकता है ।

(ii) सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा का निर्वचन : प्रतीपगन के स्वरूप को देखकर यह ज्ञात किया जा सकता है कि क्या चर मूल्यों में कोई सहसम्बन्ध है अथवा नहीं । यदि है तो उसकी दिशा व सीमा का आभास लगाया जा सकता है । निम्न उल्लेखित चित्रों के माध्यम से इसे स्पष्ट समझा जा सकता है ।







r = 0 (NO CORRELATION)

प्रतीपगमन गुणांक : सरल रेखीय प्रतीपगमन समीकरणों "a" तथा "b" महत्त्वपूर्ण मूल्य है । प्रत्येक समीकरण में "b" का मान गुणांक कहलाता है । x on y में "b" का मान bxy तथा y on x में "b" का मान byx कहलाता है, जिन्हें वैकल्पिक रूप से निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है ।

$$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{तथा} \quad bxy = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}$$

सहसम्बन्ध तथा प्रतीपगमन गुणांक

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक bxy and byx के गुणोत्तर माध्य के बराबर होता है अर्थात् दोनों गुणांक के गुणनफल का वर्गमूल ज्ञात करके "r" की गणना की जा सकती है।

$$r = \sqrt{bxy \times byx}$$

उदाहरणार्थ यदि:

X on y, तथा y on x

X = 40 + 0.4 y, y = 100 + 0.18x

तो सहसम्बन्ध गुणांक (r) होगा

$$r = \sqrt{bxy \times byx} = \sqrt{0.4 \times 18} = \sqrt{0.072} = 0.26$$

6.7 प्रतीपगमन की व्यवहारिक गणना

(A) जब दो समंक मालाएं दी गई हों :

प्रतीपगमन समीकरणें का सृजन करने की अनेक विधाएं हो सकती है । यहां तीन विधियों का उल्लेख किया गया है जिनमें से प्रथम दो प्रत्यक्ष व तीसरी लघु रीति है ।

(i) एक विधि के अनुसार युग्पत समीकरणों को हल करके प्रतीपगमन रेखाओं का सृजन निम्न प्रकार किया जा सकता है (न्यूनतम वर्ग रीति) ।

x on y	y on x
Basic equation x = a+by Normal equation for solving “a” and “b” $\sum X = na + b\sum y$ $\sum Xy = a\sum y + b\sum y^2$	Basis equation Y = a +bx Normal eqation for solving “a” and “b” $\sum y = na + b\sum x$ $\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$

इस विधि के द्वारा प्रतीपगमन समीकरणों के आकलन को "न्यूनतम वर्ग रीति" (Least square mrthod) के द्वारा किया गया आकलन कहा जाता है ।

(ii) दूसरी विधि के अनुसार वास्तविक समानान्तर माध्यों से विचलन लेकर निम्न सूत्रों का प्रयोग करते हुए प्रतीपगमन समीकरणों का सृजन किया जा सकता है ।

x on y	y on x
$\left(X - \overline{X}\right) = \frac{\sum dxdy}{\sum dy^2}\left(y - \overline{y}\right)$	$\left(y - \overline{y}\right) = \frac{\sum dxdy}{\sum dy^2}\left(x - \overline{x}\right)$

(iii) वैकल्पिक (लघु रीति) रूप से जब कल्पित माध्य से विचलन लेते हुए लघु रीति से प्रतीपगमन समीकरणों का सृजन किया जाता है तो निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है:

x on y	y on x
$\left(X - \overline{X}\right) = \left[\frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dy^2 - \frac{\left(\sum dy\right)^2}{N}}\right]\left(y - \right.$	$\left(y - \overline{y}\right) = \left[\frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dx^2 - \frac{\left(\sum dx\right)^2}{N}}\right]\left(x - \right.$

उदाहरण : 1

निम्नलिखित समंकों से दो प्रतीपगमन समीकरणों का सृजन कीजिये :

X	3	8	7	2	10
Y	9	11	5	8	7

हल :

प्रत्यक्ष विधि (प्रत्यक्ष)

X	Y	X^2	y^2	Xy
3	9	9	81	27
8	11	64	121	88
7	5	49	25	35
.2	8	4	64	16
10	7	100	49	70
30	40	226	340	236

X on y

$X = a + by$

$\Sigma x = na + b\Sigma y$

$\Sigma xy = \Sigma ya + b\Sigma y^2$

30=5a+40b- .... (i)

236 = 40a +340b ....(ii)

"a" तथा "b" का मान ज्ञात करने हेतु प्रथम समीकरण (i) को 8 से गुणांक करके समीकरण (ii) में से समीकरण (iii) को घटाने पर

(30=5a + 40 b) x 8

236 = 40a + 340 b ....(ii)

240 = 40a + 320 b ....(ii)

– – –

-4 = +20 b

b = -0.2

30 = 5a + (40 x - 0.2)

30 = 5 a - 8

5a = 38

a = 7.6

x = 7.6 -0.2 y

y on x ;- y = a + bx for .... Normal equation are

$\Sigma y = na + \Sigma b$ ....(i)

$\Sigma yx = \Sigma xa + \Sigma x$ ....(ii)

40 = 5a + 30 b....(ii)

236 = 30 a + 226 b ....(ii)

समीकरण (i) को 6 से गुणा करके (iii) समीकरण (ii) में से घटाने पर

236 = 30 a + 226b

240 = 30 a + 180 b

-4 = +46 b

b = -0.087

40 = 5a + 30 x - 0.087

a = 8.52

y = a + bx

i.e. y = 8.52 - 0.087 x

(ii) दूसरी प्रत्यक्ष विधि (वास्तविक माध्य से विचलन लेकर)

x	y	(x-6)dx	(y-8)dy	dx^2	dy^2	dxdy
3	9	-3	+1	9	1	-3
8	11	+2	+3	4	9	+6
7	5	+1	-3	1	9	-3
2	8	-4	0	16	0	0
10	7	+4	-1	16	1	-4
30 Σx	40 Σy	0		46	20	-4

$\bar{x} = \frac{\sum x}{5} = \frac{30}{5} = 6$ $\bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{40}{5} = 8$

$$\left(\bar{f} - \bar{x}\right) = \frac{\sum dxdy}{\sum dy^2}\left(y - \bar{y}\right)$$

$$\left(x-6\right) = \frac{-4}{20}\left(y-8\right)$$

$$\left(x-6\right) = -.2\left(y-8\right)$$

X = 6 -0.2 y + 1.6 or x = 706 -0.2 y

$$\left(y - \bar{y}\right) = \frac{\sum dxdy}{\sum dx^2}\left(x - \bar{x}\right)$$

$$\left(y-8\right) = \frac{-4}{46}\left(x-6\right)$$

y = 8.5 + .087 (x - 6) or y = 8.52 - 0.087 x

(iii) लघु रीति (काल्पनिक माध्य से विचलन लेकर)

x	y	A=5 (x-A) (x-5) dx	A = 7 (y-A) (y-7) dy	dx^2	dy^2	dxdy
3	9	-2	+2	4	4	-4
8	11	+3	+4	9	16	+12
7	5	+2	-2	4	4	-4
2	8	-3	+1	9	1	-3
10	7	+5	0	25	0	0
30		+5	+5	51	25	+1

(i) x on y :

$$\Rightarrow (x-6) = \left[\frac{1-\left(\frac{5\times5}{5}\right)}{25-\frac{(5)^2}{5}}\right](y-8)$$

$$\Rightarrow x = 6 + \left[\frac{-4}{20}\right](y-8)$$

$\Rightarrow$ x = 6 - 0.2y + 1.6

x = 7.6 - 0.2 y

(ii) y on x :

$$\Rightarrow (y-8) = \left[\frac{1-\left(\frac{5\times5}{5}\right)}{51-\frac{(5)^2}{5}}\right](x-6)$$

$$\Rightarrow y = 8 + \left[\frac{-4}{46}\right](x-8)$$ y = 8 - 0.087x - 0.52

Y = 8.52 - 0.087x

(B) जब समस्त सांख्यिकीय माप दी हो

जब प्रश्न के दोनों श्रेणियों के माध्य, प्रमाप विचलन तथा सहसम्बन्ध गुणांक दिये हुए हो, तो निम्नलिखित विधि से प्रतीपगमन समीकरणों का सृजन किया जा सकता है :

x on y	y on x
$\left(x-\bar{x}\right) = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\bar{y}\right)$	$\left(y-\bar{y}\right) = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\bar{x}\right)$

उदाहरण : 2

निम्नलिखित समंकों से दो प्रतीपगमन समीकरणों का सृजन कीजिये :

Particular	x	y
1. Mean	250	440
2. Standard deviation	4	10
3. Coefficient of correlation between x and y = 0.8		

हल :

(i) X on y

$$\left(x-\bar{x}\right)=\frac{r\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\bar{y}\right)$$

$$\left(x-250\right)=\frac{0.8\times 4}{10}\left(y-440\right)$$

x = 250 + 0.32(y-440)

x = 250 + 0.32 y -140.8

x = 109.2 + 0.32 y

(ii) y on x :

$$\left(y-\bar{y}\right)=\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\bar{x}\right)\Rightarrow \left(y-440\right)=\frac{0.8\times 10}{4}\left(x-250\right)$$

y = 440 + 2x - 500

y = -60 + 2x

(C) जब प्रतीपगमन समीकरण दी हुई है तथा अन्य सांख्यिकीय मापों की गणना करनी हो :

उदाहरण : 3

सूचना दी गई : (a) दो प्रतीपगमन समीकरण : 8X - 110Y + 66=0 and 40X - 18Y = 241 (b) X का प्रसरण 9 है ।

ज्ञात कीजिए : (i) X व Y का माध्य, (ii) X व Y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक तथा (iii) Y का प्रमाप विचलन ।

हल :

(i) चूँकि' दोनों प्रतीपगमन रेखाएं X एवं Y मूल्यों के मध्य से होकर गुजरती है, इस कारण दोनों समीकरणों को हल करके X व Y का मूल्य निकालेंगे वहीं क्रमशः X व Y होगा ।

8X -10 Y = -66 ...(1)

40X - 18 Y = 214 ..(2)

समीकरण (1) को 5 से गुणा करके उसमें से समीकरण (2) को घटाने पर

40X - 50 Y = -30

40X -18Y = 214 $\qquad$ $Y = \frac{544}{32} = 17$

- $\quad$ + $\quad$ -

-32 y = -544

Y का मान (1) समीकरण में रखने पर -

8X - (10x17) = -66 8X = -66 +170

8X = 104 $\qquad$ $X = \frac{104}{8} = 13$

इस प्रकार $\overline{X}$ = 13 व $\overline{Y}$ = 17.

(ii) प्रश्न में यह नहीं दिया गया है कि कौनसा समीकरण प्रतीपगमन X on Y व कौनसा Y on X है, अत: हमने माना है कि -

8X -10Y + 66 = 0 $\qquad$ ...X on Y

8X = 10Y - 66 $\qquad$ $X = \frac{10}{8}Y - \frac{66}{8}$ -

X = 1.25 Y - 8.25 $\qquad$ $\therefore$ b_{xy}= 1.25

40X - 18Y = 214 $\qquad$ ..Y on X

-18 Y = -40X + 214 $\qquad$ 18Y = 40X -214

$Y = \frac{40}{18}X - \frac{214}{18}$ $\qquad$ Y = 2.22X -11.89 $\therefore$ b_{xy} = 2.22

b_{xy} = 1.25 ; b_{xy} = 2.22 दोनों ही चूंकि 1 से अधिक हैं अत: हमने जो मान्यता ली वह ठीक नहीं है । (b) दोनों का गुणनफल 1.25x2.22>1 है जो नहीं होना चाहिये, अत: अब हम अपनी मान्यता को बदलते हैं -

8X -10Y + 66 = 0 $\quad$ Y on X $\qquad$ 40X-18Y=214 $\quad$ X on Y

+10Y = 8X +66 $\qquad$ 40X = 18Y +214

y = 0.8x + 6.6 $\qquad$ x + 0.45 + 5.35

byx = 0.8 $\qquad$ bxy = 0.45

$r = \sqrt{bxy.byx}$ $\qquad$ $= \sqrt{0.8 \times 0.45} = \sqrt{0.36} = 0.6$

(iii) हम जानते हैं कि bxy $= r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$$\Rightarrow 0.45 = 0.6 \times \frac{3}{\sigma_y} - \Rightarrow \sigma_y = \frac{0.6 \times 3}{0.45} = 4$$

6.8 अभ्यासार्थ प्रश्न

(i) प्रतीपगमन की अवधारणा क्या है?

(ii) सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर बताइये ।

(iii) किस परिस्थिति में दोनों प्रतीपगमन रेखायें समान होती है?

(iv) दो प्रतीपगमन गुणांक का गुणनफल एक से अधिक क्यों नहीं हो सकता है?

(v) निम्न प्रतीपगमन समीकरणों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए

X = 1.1 Y + 0.5 Y = 0.9X - 0.35

1. प्रतीपगमन की अवधारणा की व्याख्या कीजिए तथा आर्थिक अनुसंधानों में इसकी उपयोगिता बताइये ।
2. प्रतीपगमन की धारणा की व्याख्या कीजिए । यह सहसम्बन्ध से किस प्रकार भिन्न है ?
3. 'प्रतीपगमन' की परिभाषा दीजिए । प्रतीपगमन रेखाएं दो क्यों होती है? किन परिस्थितियों में केवल एक प्रतीपगमन रेखा हो सकती है?
4. 'प्रतीपगमन' का अर्थ स्पष्ट कीजिए । आपके विचार के अनुसार दो चल मूल्यों का सहसम्बन्ध गुणांक कितना होना चाहिए, यदि दोनों प्रतीपगमन रेखाएं - (i) एक दूसरे को ढक ले, (ii) एक दूसरे के पास हो, (iii) एक दूसरे से दूर हो, तथा (iv) एक दूसरे को समकोण पर काटे ।

व्यावहारिक प्रश्न

1. एक सहसम्बन्ध के अध्ययन में निम्नलिखित मूल्य ज्ञात किए गये :

	X	Y
Mean	65	67
Standard deviation	2.5	3.5
Coefficient of correlation	0.8	

Find the two regression euations.

दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए |

[*] Ans. X = 0.571 Y +26.74, Y = 1.12X -5.8

2. विक्रय तथा विज्ञापन कार्य के सम्बन्ध में निम्नलिखित समंक उपलब्ध है

	Advertisement exp. (X) (Rs. Crores)	Sales (Y) (Rs. Crores)
Mean (8)	20	120
S.D (σ)	5	25
Coefficient of correation:	0.8	

दो समाश्रय समीकरणों का परिकलन कीजिए तथा यह भी अनुमान लगाइये (a) कि 30 करोड़ के प्रस्तावित विज्ञापन व्यय के लिए संभावित विक्रय तथा (b) 200 करोड़ रुपये की बिक्री लक्ष्य के लिए विज्ञापन व्यय की बजट राशि ।

[*] Ans. Y = 4X + 40, X = 0.16Y + 0.8, 160,32.8

3. एक कक्षा के 50 लड़कों की सांख्यिकी (X) की अर्थशास्त्र (Y) के प्राप्त अंकों पर प्रतीपगमन रेखा 3Y- 5x + 180 = 0 है । अर्थशास्त्र के अंकों का माध्य 44 है,

सांख्यिकी के अंकों का 'प्रसरण, अर्थशास्त्र के अंकों का प्रसरण का $\frac{9}{16}$ है । ज्ञात कीजिए

(i) सांख्यिकी के अंकों का माध्य, तथा (ii) X तथा Y मे सहसम्बन्ध गुणांक

Ans. (i)ξ = 62.4 (ii) r = +.8

4. X और Y श्रेणियां आपस में सहसम्बन्धित हैं, की प्रतीपगमन रेखायें इस प्रकार है 5x - 6y + 90 = 0 and 15x - 8y - 130 = 0

ज्ञात कीजिए कि कौनसा समीकरण Y का X पर तथा कौन सा X का Y पर प्रतीपगमन है । दोनों श्रेणियों का माध्य तथा सहसम्बन्ध गुणांक भी ज्ञात कीजिए ।

(B.Com.J.N.V.U. 1996)

Ans. The frist equation for Y on X and the second equation X on Y

इकाई-7

सूचकांक

इकाई की रूपरेखा

7.1 उद्देश्य
7.2 प्रस्तावना
7.3 सूचकांकों का अर्थ एवं परिभाषा
7.4 सूचकांकों की विशेषताऐं
7.5 सूचकांकों का उपयोग
7.6 सूचकांकों की सीमाएँ
7.7 सूचकांक रचना की समस्याएँ
7.8 सूचकांकों के प्रकार
(i) मूल्य सूचकांक
(ii) मात्रा सूचकांक
(iii) अर्द्ध सूचकांक
(iv) विशेष सूचकांक
7.9 सूचकांकों की गणना
(i) स्थिर आधार रीति
(ii) श्रृंखला आधार रीति
7.10 आधार वर्ष परिवर्तन
7.11 सूचकांकों का शिरोबन्धन
7.12 सूचकांकों की अपस्फीति
7.13 शब्दावली
7.14 स्व-परख प्रश्न

नोट - इस इकाई में सरल या अभारित सूचकांक का ही वर्णन किया गया है ।

7.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन का उद्देश्य निम्न जानकारी प्रदान करना है-

- सामाजिक, आर्थिक तथा राजनैतिक क्षेत्र में सूचकांकों की आवश्यकता
- सूचकाको का अर्थ एवं परिभाषा
- सूचकांकों की विशेषताऐं
- सूचकांकों का उपयोग
- सूचकांकों की सीमाएँ
- सूचकांक रचना की समस्याएं
- सूचकांकों के प्रकार
- आधार वर्ष परिवर्तन

- सूचकांकों का शिराबन्धन
- सूचकांकों की अपस्फीति

7.2 प्रस्तावना

आर्थिक सामाजिक, राजनैतिक व अन्य क्षेत्रों में परिवर्तन होते रहते हैं | इन परिवर्तनों का व्यवस्थित अध्ययन किसी आधार पर किया जाता है । सूचकांक परिवर्तनों के अध्ययन की एक वैज्ञानिक विधि है ।

7.3 सूचकांकों का अर्थ एवं परिभाषा

परिवर्तन प्रकृति का नियम है । आर्थिक, सामाजिक एवं व्यवसायकि क्षेत्रों में समय के साथ-साथ परिवर्तन होते हैं । यदि दो अवधियों के विभिन्न तथ्यों से सम्बन्धित तुलनात्मक मूल्य समंकों में व्यक्त किये गये हैं तो तुलनात्मक सांख्यिकीय अध्ययन में सूचकांकों की महत्वपूर्ण भूमिका है । सूचकांको को मुद्रा के मूल्य में परिवर्तन के मापने की विधि माना जाता है । प्रारम्भ में सूचकांक का प्रयोग केवल मूल्य-परिवर्तनों के प्रभाव का अध्ययन करने हेतु किया जाता था लेकिन आजकल सूचकांक तकनीक का प्रयोग सांख्यिकी में इतना अधिक होने लगा है कि शायद ही ऐसा कोई क्षेत्र हो जहाँ सूचकांकों का प्रयोग नहीं होता है । बाउले के अनुसार, 'सूचकांक ऐसे कारकों के प्रभाव में परिवर्तनों के अध्ययन करने के लिए है, जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता हे ।" यदि हम किसी स्थान पर दो अवधियों के वस्तुओं के मूल्यों में हुए परिवर्तनों विदेशी व्यापार, औद्योगिक उत्पादन एवं रोजगार सम्बन्धी क्षेत्रों के परिवर्तनों को मापना चाहें तो वह बिना सूचकांकों के प्रयोग से सम्भव नहीं होगा ।

सभी वस्तुओं के मूल्यों अथवा उत्पादन या अन्य क्षेत्रों में समान परिवर्तन तो नहीं होते हैं अपितु किसी भी मूल्य में वृद्धि, किसी के मूल्य में कमी या किसी के मूल्य में स्थिरता भी रह सकती है अतएव ऐसी दशा में परिवर्तनों के इस माध्य को सांख्यिकी में सूचकांक या निर्देशांक (Index Numbers) 'कहते हें । इस प्रकार "सूचकांक एक विशेष प्रकार के माध्य होते है" जिनकी सहायता से काल श्रेणी और स्थान श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृति को मापते है । जैसे यदि हम यह कहते है कि 2006 की अपेक्षा 2007 में वस्तुओं के सामान्य मूल्य सूचकांक 160 है तो इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि 2006 की तुलना में 2007 के मूल्यों में (160 - 100) 60% की वृद्धि हुई हैं |

इनकी मूल प्रवृति को ध्यान में रखते हुए निम्न कुछ परिभाषाएँ प्रस्तुत की जा सकती है

1. **होरेस सेक्राइस्ट के अनुसार**:- "सूचकांक अंकों की एक ऐसी श्रेणी है, जिसके द्वारा किसी भी तथ्य के परिणाम में होने वाले परिवर्तनों का समय या स्थान के आधार पर मापन किया जा सकता है । "
2. **मूरे आर. स्पीगल के अनुसार**, "सूचकांक एक ऐसा सांख्यिकीय माप है जो समय, भौगोलिक स्थिति या अन्य विशेषता के आधार पर किसी चर-मूल्य अथवा सम्बन्धित चर-मूल्यों के समूह में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है । "

3. **क्रॉक्सटन एवं कॉउडेन के अनुसार**, "सूचकांक एक समूह के सम्बन्धित चर-मूल्यों के आकार (या परिणाम) में होने वाले अन्तरों का माप करने के साधन है । " इनके द्‌वारा परिवर्तनों की औसत माप या समय या स्थान के आधार पर की जाती है ।

4. **एल्वा, एम.टुटल के अनुसार**, "सूचकांक एकमात्र अनुपात (सामान्यत: प्रतिशतों में) है जो विभिन्न चरों में, दो विभिन्न स्थानों में सामूहिक (अर्थात् औसत रूप में) परिवर्तनों को मापता है |" यह परिभाषा अन्यों की अपेक्षा उत्तम है क्योंकि इसमें वे सभी विशेषताएँ निहित है जो कि सूचकांक में होनी चाहिए ।

उपयुक्त परिभाषाओं के आधार पर सारांश रूप में यह कहा जा सकता है कि सूचकांक एक अंक होता है जो काल श्रेणी या स्थान श्रेणी (Time series or spatial series) में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है ।

7.4 सूचकांकों की विशेषताएँ

1. संख्या में व्यक्त : सूचकांक सदैव परिवर्तनों को संख्या में व्यक्त किये जाते है । जैसे औद्‌योगिक उत्पादन या कृषि उत्पादन घट गया है या बढ़ गया है लेकिन इस परिवर्तन को सूचकांक केवल संख्या में व्यक्त करते है ।

2. प्रतिशतों का माध्य : सूचकांक एक विशेष प्रकार के माध्य है । आधार वर्ष के तथ्यों को 100 मानकर प्रचलित वर्ष के मूल्यों को प्रतिशत में परिवर्तित कर लेते है, जिन्हें मूल्यानुपात कहते है । फिर सभी मूल्यानुपातों का औसत ज्ञात करके सामान्य सूचकांक की संख्या ज्ञात की जाती है ।

3. तुलना का आधार : सूचकाँकों की प्रकृति तुलनात्मक होती है तथ्यों की तुलना समय या स्थान या अन्य विशेष आधार पर की जा सकती है । सामान्यत तुलना समय के आधार पर की जाती है, जैसे थोक मूल्य सूचकांक 2006 की अपेक्षा 2007 में 125 था तो इसका अभिप्राय है कि मूल्यों में (125- 100)25% की वृद्धि हुई, लेकिन इस वृद्धि का अर्थ कदापि यह नहीं लगाना चाहिए कि किसी भी वस्तु के मूल्य में कोई भी कमी अथवा इससे अधिक वृद्धि नहीं हुई है ।

4. तथ्यों को प्रतिशतों में व्यक्त करना : परिवर्तन की मात्रा को निरपेक्ष रूप में व्यक्त करने से वे तुलना योग्य स्थिति में नहीं रहते है । अत: उन्हें सापेक्ष माप में परिवर्तित करना अनिवार्य होता है । इसके लिए आधार को 100 मानकर उसे प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है ।

5. सार्वभौमिक उपयोगिता : सूचकांकों की उपयोगिता सर्वव्यापी है । वर्तमान युग में सूचकांक केवल मूल्य-स्तर के मापन हेतु ही प्रयुक्त नहीं किये जाते है बल्कि सरकारी व गैर-सरकारी संस्थान तथा राजनैतिक, सामाजिक सूचकांकों के आधार पर अपनी नीतियों का निर्धारण एवं कार्य का नियन्त्रण एवं संचालन भी करते है |

7.5 सूचकांक का उपयोग एवं महत्व (Importance and Use of Index Numbers)

आज के परिवर्तनशील युग में आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्र में होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण करने में सूचकांक महत्वपूर्ण योगदान प्रदान करते है । यह अतिशयोक्ति नहीं होगी कि

सूचकांक आज के आर्थिक जगत के कर्णधार है, वस्तुत: कुछ व्यक्ति सूचकांक को 'आर्थिक वायु-मापक यंत्र' (Economic Barometer) की संज्ञा प्रदान करते है । जिस प्रकार वायु-मापक यन्त्र द्वारा मौसम की स्थिति का अध्ययन करते है, उसी आधार पर भावी आर्थिक प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है । इस प्रकार सूचकांकों को मुद्रा-प्रसार व संकुचन सम्बन्धी प्रवृतियों का संकेतक (Indicator) भी कहते है ।

इस प्रकार सूचकांक भूत के तथ्यों को वर्तमान में सम्बोधित करते हैं तथा भविष्य के लिए निर्देशन देते है । अत: सूचकाँकों को महत्व प्रो. ब्लेयर के कथन से स्वत: ही स्पष्ट हो जाता है कि "सूचकांक व्यावसायिक पथ पर प्रदर्शक और निर्देश स्तम्भ है, जो व्यवसायी को अपने कार्यो का संचालन एवं प्रबन्ध करने की रीति बतलाते है । " सूचकांक व्यापारी, राजनीतिज्ञ, समाजशास्त्री, अर्थशास्त्री, प्रशासक आदि का पग-पग पर मार्गदर्शन करते है ।

सूचकाँकों के महत्वपूर्ण उपयोग निम्न प्रकार है:-

1. मुद्रा की क्रय-शक्ति का मापदण्ड: मुद्रा की क्रय शक्ति में निरन्तर परिवर्तन होता रहता है, हम रोजमर्रा सुनते है कि आज रूपये का मूल्य दस पैसे के बराबर है अर्थात् एक रूपये में जितनी वस्तुएँ पहले क्रय कर सकते थे उतनी वस्तुएँ क्रय नहीं कर सकते है । अत: मुद्रा का वास्तविक मूल्य क्या है? इसकी जानकारी सूचकांक द्वारा ज्ञात की जाती है ।

2. नीति निर्धारण में सहायक: नीति निर्धारण करने में सूचकांक पथ-प्रदर्शन का कार्य करते है । व्यापारी, उद्योगपति तथा सरकार अपने कर्मचारियों को महंगाई भत्ते देने के सम्बन्ध में जो निर्णय लेते है तो सूचकाँको की सहायता से ही वे (नियोजक) यह जानकारी प्राप्त करते हैं कि मूल्यों में कितने प्रतिशत वृद्धि हुई है और उसके आधार पर ही मंहगाई भत्ते की राशि तय करते है ।

3. तुलनात्मक अध्ययन की सरलता: जिन तथ्यों की साधारण औसत के आधार पर तुलना करना सम्भव नहीं है वहाँ पर सूचकांक से तुलना करना सरल हो जाता है क्योंकि सूचकांक परिवर्तन को सापेक्षिक रूप में प्रकट करते है । जैसे यदि कहा जाये कि 2006 में किसी स्थान पर चावल का मूल्य 9 रू. प्रति किलो तथा चीनी का मूल्य 15 रू. प्रति किलो, कपडे का मूल्य 22रू प्रति मीटर था और 2007 में इनका मूल्य क्रमश: 10रू, 16रू, प्रति किलो तथा कपड़े का मूल्य 27रू प्रति मीटर हो गया तो इन निरपेक्ष मूल्यों के आधार पर तुलना करना सम्भव नही, लेकिन यदि यह कहा जाये कि 2006 के आधार पर इन मूल्यों का सूचकांक 2007 में 245 है तो इसका अर्थ यह हुआ कि 2006 की तुलना में 2007 में वस्तुओं के मूल्यों में औसत रूप से 145% की वृद्धि हुई ।

4. भावी प्रवृति की जानकारी में सहायक: आर्थिक एवं व्यापारिक प्रवृति को जानने में सूचकाँकों का प्रयोग अधिक उपयोगी रहता है, जैसे भारत के गत 10 वर्षो के निर्यात- सूचकाँको का अध्ययन करें तो उनकी प्रवृति (Trend) का पता चलेगा कि निर्यात का प्रतिशत बढ़ रहा है या घट रहा है ।

5. सरकारी नियन्त्रण के लिए पूर्वाभास : सूचकाँकों की सहायता से सरकार विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों के परिवर्तनों की पूर्ण जानकारी प्राप्त करके उन पर आवश्यक नियन्त्रण रख सकती है, जैसे

अत्यधिक मूल्य वृद्धि या कमी को नियन्त्रित करना और मूल्यों में स्थिरता लाने का प्रयास करती है ।

6. जटिल तथ्यों को सरल बनाना: सूचकांक तकनीक का प्रयोग ऐसे तथ्यों के परिवर्तनों को मापने के लिए किया जाता है जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता है ये तथ्य स्वयं विद्‌यमान नहीं होते है ।

7. राष्ट्रीय आय के परिवर्तन का अनुमान: सूचकाँकों की सहायता से किसी राष्ट्र की राष्ट्रीय आय में होने नाले उच्चावचनों को भी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है ।

8. विनिवेशको के लिये उपयोगी: अंशों एवं प्रतिभूतियों के सूचकांक प्रतिदिन के इनके भावों में परिवर्तन के सूचक होते है । सूचकाँकों में वृद्धि या कमी के संकेत से विनियोजक पूंजी बाजार में प्रवेश करते है इससे सूचकांक विनिवेशको के लिये उपयोगी होते है ।

9. उद्‌योग के लिए सूचकांक की उपयोगिता: सूचकाँकों के उपर्युक्त महत्व एवं उपयोगी के अध्ययन से इनकी विभिन्न क्षेत्रों में उपयोगिता स्पष्ट हो जाती है । उद्‌योगों के लिए भी सूचकांक बहु त उपयोगी होते है ।

(i) श्रमिकों की वास्तविक आय का अध्ययन करके उसमें होने वाले परिवर्तनों के अनुरूप श्रम कल्याण नीतियों का निर्धारण किया जाता है ।

(ii) श्रमिकों के महंगाई भत्ते का निर्धारण किया जाता है ।

(iii) उत्पादन,मजदूरी, लाभ आदि सूचकांक, उद्‌योग के लिए उपयोगी होते है ।

(iv) उत्पादन सूचकाँकों के द्‌वारा उत्पादन की प्रवृति का अध्ययन किया जाता है ।

(v) मूल्य सूचकांकों की सहायता में मूल्य स्तर में होने वाले परिवर्तनों के आधार पर उत्पादन नीति का निर्धारण किया जाता है ।

7.6 सूचकाँकों

सूचकाँकों की प्रमुख सीमाएँ निम्न है -

1. औसत रूप में ही लागू होना : सूचकाँकों में विभिन्न काल श्रेणियों के समंकों में हु ए सापेक्ष परिवर्तनों का मापन किया जाता है । इसलिये ये केवल संकेतक होते है, निरपेक्ष परिवर्तनों की जानकारी नहीं कराते हैं । इनसे प्राप्त निष्कर्ष सामूहिक व औसत रूप में ही लाग होते है ।

2. शुद्धता की कमी सूचकाँकों की रचना करते समय विभिन्न प्रकार की वस्तुओं एवं मूल्यों का चुनाव न्यादर्श विधि से किया जाता है । इनमें शत-प्रतिशत शुद्धता का सदैव अभाव रहता है ।

3. निश्चित उद्देश्य : किसी एक उद्देश्य के लिए रचित निर्देशांक का उपयोग किसी अन्य उद्देश्य के लिए नहीं किया जा सकता है । अत: अलग-अलग उद्देश्यों के लिए अलग-अलग सूचकांक बनाये जाते हैं ।

4. अल्पकालीन तुलना के योग्य : समय-समय पर वस्तुओं की किस्म, व्यक्तिओं की रूचि, आर्थिक एवं सामाजिक स्थिति में होने वाले परिवर्तनों के परिणामस्वरूप इनकी रचना विधि में भी परिवर्तन किया जाता है ।

5. माध्यों की सीमाएँ : सूचकाँकों की रचना में विभिन्न माध्यों का प्रयोग किया जाता है, जैसे समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य व मध्यका आदि । इनकी सीमाओं का प्रभाव सूचकांक पर भी पड़ता है ।

6. विभिन्न रीतियों द्वारा भिन्न-भिन्न निष्कर्ष : सूचकांक कई रीतियों द्वारा ज्ञात किये जाते है । इन विभिन्न रीतियों से सूचकॉक भी अलग-अलग निकलते है, अत: उनमें संदेह उत्पन्न हो जाता है ।

7.7 सूचकांक रचना समस्याएँ

सूचकांकों की रचना करने से पूर्व अनेक समस्याएँ उपस्थित होती है । मूल्य सूचकाँकों की रचना करते समय निम्न समस्याओं पर विचार करना पड़ता है:

1. सूचकांकों का उद्देश्य
2. आधार वर्ष का चुनाव
3. वस्तुओं का चुनाव
4. मूल्यों का चुनाव
5. माध्य का चुनाव
6. भार का चुनाव
7. उपयुक्त सूत्र का चुनाव

1. सूचकांकों का उद्देश्य : जिस उद्देश्य से सूचकांकों का निर्माण किया जा रहा है उसे स्पष्ट तथा निश्चित रूप से निर्धारित कर लेना आवश्यक है । यह कार्य सूचकांक निर्माण योजना बनाने के साथ होता चाहिए । कोई भी सूचकांक ऐसा नहीं है जिससे सभी उद्देश्यों की पूर्ति हो सके । प्रत्येक सूचकांक का सीमित एवं विशेष प्रयोजन होता है और वह उसी की पूर्ति हेतु निर्मित किया जाता है । उद्देश्य का पूर्व निश्चित होना सूचकांकों के निर्माण की अन्य प्रक्रियाओं पर भी प्रभाव डालता है । उदाहरणार्थ, औद्योगिक श्रमिकों के लिए सूचकाँकों की रचना करते समय उनकी विशिष्ट आवश्यकताओं का ध्यान में रखकर ही सूचकांक तैयार किये जाने चाहिए ।

2. आधार वर्ष का चुनाव : सूचकाँकों में दिये गये अंक किसी अवधि के एक निश्चित अवधि में अनुपात को बताते है । इस निश्चित अवधि को ही आधार कहते है । सूचकांक स्वयं परिवर्तनों को व्यक्त करने वाले प्रतिशत है और ये परिवर्तन आधार की तुलना में प्रतिशत में ही व्यक्त किये जाते है । यह आधार वर्ष, माह या दिन भी हो सकता है, परन्तु यह सूचकांक के उद्देश्य पर निर्भर करता है । जैसे- आधार वर्ष 2001 में गेहूँ का मूल्य 600 रूपये प्रति क्विण्टल था तथा वर्ष 2006 में गेहूँ का मूल्य 1,200 रूपये प्रति क्विण्टल हो गया तो वर्ष 2001 के लिए सूचकांक (आधार वर्ष) 100 होगा तथा वर्ष 2006 में यह सूचकांक 1200 / 600x100 =200 हो गया है । आधार वर्ष का चुनाव बहु त सावधानी के साथ करना चाहिए । इसके चुनाव में निम्न का ध्यान रख जाना चाहिये ।

(i) आधार वर्ष हर प्रकार से सामान्य वर्ष होना चाहिए अर्थात् वह वर्ष ऐसा होना चाहिए जिसमें महामारी, युद्ध, अकाल, अवसाद, अभिवृद्धि, मुद्रा-प्रसार या संकुचन सम्बन्धी असाधारण घटना न घटी हो । लेकिन व्यवहार में शायद ही ऐसा कोई वर्ष हो जिसमें कोई न कोई घटना न

घटी हो । आधार वर्ष, एक वास्तविक वर्ष होना चाहिए जिससे सम्बन्धित सभी सूचनाएँ सरलता से उपलब्ध हो सकें ।

(ii) आधार वर्ष बहु त पुराना भी नहीं होना चाहिए ।

3. वस्तुओं का चुनाव : सूचकांकों की रचना में वस्तुओं का स्थान महत्त्वपूर्ण है । किन-किन वस्तुओं को सूचकांकों में सम्मिलित करें, क्योंकि सभी वस्तुओं को सम्मिलित करना तो संभव ही नहीं है और न ही आवश्यक है । अत: सूचकांकों की रचना में प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव कर लिया जाता है । वस्तुओं के चयन में निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए

(i) प्रतिनिधि एवं लोकप्रिय:- वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिए जो अध्ययन से सम्बन्धित इकाइयों में लोकप्रिय हो तथा उनकी आदतें, रीति-रिवाजों तथा आवश्यकताओं का प्रतिनिधित्व करती है । जैसे- श्रमिकों के जीवन निर्वाह, व्यय के सूचकांक मे मोटर कार, टेलीविजन, स्कूटर, मोटरसाईकिल, स्कूटर, फ़िज आदि को सम्मिलित किया जाए तो वह सूचकांक मजदूरो के रहन-सहन का प्रतिनिधित्व नही करेगा ।

(ii) प्रमापित एवं सजातीय :- चुनी हुई वस्तुएँ प्रमाणित एवं श्रेणीबद्ध (Graded) गुण वाली होनी चाहिए । उनकी किस्मों एवं गुणों में एकरूपता या सजातीय होनी चाहिए । प्रमापित वस्तुओं में विश्वसनीयता का गुण अन्तर्निहित होता है ।

(iii) पहचान योग्य:- प्रतिनिधि वस्तुएँ ऐसी होनी चाहिए जिन्हें सरलता से पहचाना जा सके तथा जिनके विषय में किसी प्रकार की शंका की गुंजाइश नही हो । जैसे- अनाज शब्द का प्रयोग उचित नही है क्योंकि गेहूं, चावल,जौ, बाजरा, मक्का आदि इसमें सम्मिलित किये जाते है ।

(iv) वस्तुओं की संख्या:- इलेक्ट्रोनिक समंक संसाधन विशेषकर कम्प्यूटरों का प्रयोग बढ़ने से सम्मिलित की जाने वाली वस्तुओ की संख्या लगातार बढ़ती जा रही है । भारत में आर्थिक सलाहकार के थोक मूल्य सूचकांक वर्ष 1961 -62 में 139 वस्तुएँ थी जबकि वर्तमान में 360 वस्तुओं को सम्मिलित किया है जिनमें 80 प्रमुख वस्तुएँ, 270 निर्मित उत्पाद तथा 10 अन्य वस्तुएँ सम्मिलित है: । इंग्लैण्ड का व्यापार बोर्ड केवल 200 वस्तुओं को सम्मिलित करता है जबकि संयुक्त राज्य अमेरिका श्रम समंक केन्द्र द्वारा निर्मित थोक मूल्य सूचकाँको की रचना में 450 वस्तुएँ चुनी गई हैं जितनी अधिक वस्तुओं को सम्मिलित किया जायेगा, प्रतिनिधित्व उतना ही अधिक बढ़ता जावेगा ।

4. मूल्यों का चुनाव : मूल्य सूचकाँकों के निर्माण में मूल्यों का चुनाव बहु त महत्वपूर्ण है । मूल्यों का उचित रीति से चुनाव अत्यन्त आवश्यक है क्योंकि परिवर्तन की मात्रा इनके आधार पर ही मापी जाती है । मूल्यों के चुनाव के सम्बन्ध में निम्न बातों का ध्यान रखना आवश्यक है:-

(i) मूल्य का प्रकार: थोक मूल्य अथवा फुटकर मूल्य लिये जाये इसका निर्णय सूचकांकों की प्रकृति एवं उद्देश्य पर निर्भर करता है । थोक मूल्य, फुटकर मूल्यों की अपेक्षा कम परिवर्तनशील होते हैं तथा एक स्थान से दूसरे स्थान के इन मूल्यों में भी फुटकर की अपेक्षा कम अन्तर होता है । थोक मूल्य सूचकाँकों के लिए थोक मूल्य तथा जीवन-निर्वाह सूचकाँकों के लिए फुटकर मूल्य लिये जाते है ।

(ii) मूल्य प्राप्त करने के स्थान: थोक मूल्य बडी मण्डियाँ व प्रमुख बाजारों तथा प्रतिनिधि व्यापारियों से प्राप्त किये जाने चाहिये तथा फुटकर मूल्य उन दुकानों या स्टोरों से प्राप्त किये जाने चाहिए जहाँ से वह वर्ग, जिसके दृष्टिकोण से सूचकांक बना रहे है, अपना माल क्रय करता है । यदि एक ही वस्तु के अनेक बाजार हो तो उनमें से किसी न्यादर्श विधि द्वारा कुछ बाजारों को चुन लेना चाहिए ।

(iii) मूल्य का निर्धारण: बाजार में मूल्य अनेक होते हैं तथा नियन्त्रित मूल्यों (controlled) के होने पर वास्तविक मूल्यों को ज्ञात करना बडा कठिन होता है, क्योंकि कोई भी व्यक्ति खुले में काले बाजार मूल्य पर अपनी वस्तुएँ बेचकर या उनको बतलाकर जाल में नहीं फंसना चाहता । फिर भी यह आवश्यक है कि जिन मूल्यों पर वास्तविक क्रय-विक्रय हो, उन्हें प्राप्त करने का प्रयत्न किया जाये, क्योंकि वे मूल्य ही परिवर्तन के सही सूचक है परन्तु मूल्य सदैव विश्वसनीय एवं प्रामाणिक होने चाहिए | जैसे वर्तमान में नवीन सूचकाँकों में 360 वस्तुओं के 1275 मूल्य का निर्धारण किया जायेगा।

(iv) मूल्य व्यक्त करने के रूप : वस्तुओं के मूल्य का निश्चय करने में अत्यन्त आवश्यक बात यह है कि मूल्य किस प्रकार व्यक्त किये जायें । ये दो प्रकार के व्यक्त किये जाते है:-

(क) मुद्रा में व्यक्त मूल्य : इस रूप में वस्तु की मात्रा निश्चित रहती है जैसे- चीनी का मूल्य 16 रू. प्रति किलो, गेहूं का मूल्य 10रू. प्रति किलों, वस्त्र 25 रू. प्रति मीटर । इस रीति में मूल्य प्रति वस्तु की इकाई के लिए मुद्रा में व्यक्त किये जाते है ।

(ख) मात्रा में व्यक्त मूल्य : यह मूल्य प्रति मुद्रा इकाई में व्यक्त किया जाता है अर्थात् मुद्रा की इकाई निश्चित रहती है और मात्रा कम या अधिक रहती है, जैसे- 2 रूपये की 100 ग्राम चीनी, 20 रूपये का 100 ग्राम घी आदि ।

सूचकांक की रचना में केवल मुद्रा में व्यक्त मूल्य का प्रयोग किया जाता है । यदि प्रश्न में मात्रा में व्यक्त मूल्य दे रखे हो जैसे- 2 रूपये की 100 ग्राम चीनी तथा 20 रूपये का 100 ग्राम घी तो इन मात्रा मूल्यों को हम मुद्रा मूल्यों में अर्थात् चीनी 20रू. प्रतिकिलो तथा घी 200 रू. प्रति किलों में परिवर्तित करके ही सूचकांक की रखना में प्रयुक्त करेंगे ।

5. **माध्य का चुनाव :** केवल चल-समूह के सूचकांक तैयार करने पर माध्य के चुनाव का प्रश्न उठाना स्वाभाविक होता है न कि एक चल के सूचकांक का निर्माण करने पर । सूचकांक विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातो का माध्य है, अत: सूचकांक की रचना में किसी सांख्यिकीय माध्य- समान्तर माध्य, मध्यका, भूयिष्ठक, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य- का प्रयोग करना उचित है । सैद्धान्तिक दृष्टि से तो हम किसी भी माध्य का प्रयोग कर सकते है, लेकिन व्यवहार में इनमें से किसी एक का ही प्रयोग करना चाहिए ।

समान्तर माध्य : समान्तर माध्य अत्यन्त सरल तो है लेकिन अति सीमान्त पद-मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है तथा यह उत्क्राम्य भी नहीं होता है और केवल निरपेक्ष माप के लिए अधिक उपयुक्त रहता है । वह माध्य सूचकांक के लिए अनुपयुक्त है | लेकिन परिकलन में अधिक सरल होने के कारण व्यवहार में इसका अधिक प्रयोग किया जाता है ।

गुणोत्तर माध्य : वैज्ञानिक दृष्टि से गुणोत्तर माध्य सामान्तर माध्य की अपेक्षा सूचकाँकों की रचना में अधिक उपयुक्त है फिर भी इसका प्रयोग विशेष दशाओं में ही किया जाता है । (i) गुणोत्तर माध्य सापेक्ष परिवर्तन का श्रेष्ठ माप है । (ii) इसमें कम मूल्यों को अधिक महत्व और अधिक मूल्यों को कम महत्व दिया जाता है । (iii) इसके प्रयोग से सूचकाँकों में उत्क्राम्यता का गुण आ जाता है ।

विभिन्न प्रकार के सूचकांकों के तैयार करने में गुणोत्तर माध्य की अपेक्षा सामान्तर माध्य का प्रयोग ही किया जाता है, क्योंकि इसकी गणन-प्रक्रिया अधिक सरल है । लेकिन शुद्धता प्राप्त करने के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है ।

6. भार का चुनाव : सूचकाँकों की रचना करते समय सापेक्षिक महत्व के अनुसार वस्तुओं को भार (Weight) दिया जाता है । जैसे चीनी के मूल्यों में वृद्धि तथा नमक के मूल्यों में वृद्धि उपभोक्ता को एक तरह से प्रभावित नहीं करती है । क्योंकि दोनों वस्तुओं का महत्व अलग-अलग है । भार दो प्रकार से दिया जा सकता है: (i) प्रत्यक्ष या सुनिश्चित (Explicit) (ii) अप्रत्यक्ष या परोक्ष (Implicit) (i) प्रत्यक्ष भार की स्थिति में भार (weight) अलग से तय किये जाते है । यह भार दो प्रकार के होते है । (i) मात्रा भार (Quantity weights) (ii) मूल्य भार (Value weights) औचित्य के आधार पर अलग-अलग परिस्थितियों में मात्रा अथवा मूल्य के भार दिये जाते है । इसका विस्तृत वर्णन अगली इकाई में किया गया है । (i) अप्रत्यक्ष भार की स्थिति में वस्तु के महत्व के अनुसार उसे उतनी बार सम्मिलित कर लिया जाता है । जैसे-चीनी को 10 बार तथा नमक को एक बार भार दिया जायेगा । इसका विस्तृत वर्णन अगली इकाई में किया गया है।

7. उपयुक्त सूत्र का चुनाव : सूचकांक की रचना करने की दृष्टि से अनेक सूत्रों का प्रयोग किया जाता है । सूत्र का चयन भी एक गहन समस्या है और जिसका समाधान न केवल सूचकांक के उद्देश्य पर निर्भर करता है बल्कि समंको की उपलब्धता पर आधारित होता है । सैद्धान्तिक दृष्टि से फिशर के सूचकांक को आदर्श सूत्र माना गया है क्योंकि वह समय उत्क्राम्यता परीक्षण को पूर्णरूप से सन्तुष्ट करता है फिर भी व्यवहार में एक सूत्र को ही सर्वोत्तम नही कहा जा सकता, क्योंकि प्रत्येक अनुसंधानकर्त्ता प्रयुक्त तकनीकी विधियाँ तथा उद्देश्य के आधार पर सूचकांक-सूत्र का चुनाव करता है ।

7.8 सूचकाँकों के प्रकार

सूचकांक को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है:

1. मूल्य सूचकांक : अधिकांश व्यवसायी गण ही दो अवधियों के बीच विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का माप करने के लिए सूचकाँकों का प्रयोग करते है । जैसे- थोक मूल्य सूचकांक, फुटकर मूल्य सूचकांक, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक आदि व्यवसायी जगत में अधिक लोकप्रिय एवं उपयोगी होते है ।

2. मात्रा या परिमाण सूचकांक : विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन, विक्रय एवं वितरण तथा उपभोग सम्बन्धी क्रियाओं में होने वाले परिवर्तनों के माप हेतु जो सूचकांक निर्मित किये जाते है उसे परिणाम सूचकांक कहते है |

3. अर्द्ध मूल्य सूचकांक : ऐसे सूचकांक जो केवल मूल्य या मात्रा के आधार पर नही, बल्कि दोनों के आधार पर तैयार किये जाते हैं तथा ये प्रचलित वर्ष के कुल मूल्य (total value) तथा आधार वर्ष के कुल मूल्य के तुलनात्मक अध्ययन के लिए निर्मित किये जाते है ।

4. विशेष सूचकांक : किसी विशेष घटना के परिवर्तनों का माप करने हेतु जो सूचकांक तैयार किये जाते है उसे विशेष उद्देश्य के सूचकांक कहते है ।

7.9 सूचकाँकों की गणना

अभारित या साधारण सूचकाँकों की रचना करने में भार (weightI) नहीं दिये जाते है । इस विधि में सभी वस्तुओं को समान महत्व दिया जाता है । इस विधि में चालू वर्ष के मूल्य या मूल्यानुपात में आधार वर्ष के मूल्य या मूल्यानुपात का भाग देकर सूचकांक ज्ञात किये जाते है सूत्र रूप में:

$$P_{01=} \qquad \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$$

P_1 = चालू वर्ष के मूल्य

P_0 = आधार वर्ष के मूल्य

आधार वर्ष के आधार पर दो प्रकार से अभारित सूचकांक बनाये जा सकते है :-

(i) स्थिर आधार विधि

(ii) श्रृंखला आधार विधि

स्थिर आधार विधि भी दो प्रकार की हो सकती है -

(अ) एक वर्षीय आधार

(ब) बहु वर्षीय माध्य आधार

(अ) एक वर्ष के मूल्य को अन्य वर्षो के सूचकाँकों की गणना करने हेतु आधार वर्ष का मूल्य (P_0) माना जाता है और अन्य वर्षो के मूल्य को चालू वर्ष का मूल्य (P_1) मान लिया जाता है । आधार वर्ष का सूचकांक सदैव 100 माना जाता है । यह आधार वर्ष प्रारम्भ का वर्ष या अन्य कोई भी वर्ष माना जा सकता है । यह ध्यान रखने योग्य है कि प्रश्न में आधार वर्ष का उल्लेख न किया गया हो तो प्रथम वर्ष को ही आधार वर्ष माना जाना चाहिए ।

Illustration 1: एक वस्तु के निम्नलिखित मूल्यों से 2001 वर्ष को आधार मानते हुए प्रत्येक वर्ष के सूचकांक ज्ञात कीजिए:

Year :	2001	2002	2003	2004	2005
Price is Rs. :	20	25	50	80	100

Solution : Calculation of index Numbers

Year	Price in Rs.	Index number 2001 = 100
2001	20	=100
2002	25	$\frac{25}{20} \times 100 = 125$

2003	50	$\frac{50}{20}\times100=250$
2004	80	$\frac{80}{20}\times100=400$
2005	100	$\frac{100}{20}\times100=500$

(i) साधारण सखी विधि : इस विधि में वर्तमान वर्ष (Current Year) में प्रदत्त विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों का योग लगा लेते है और उसमें आधार वर्ष (base Year) की विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों के योग का भाग देकर भागफल को 100 से गुणा कर देते है । इसको निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करते है ।

$$P_{01}= \frac{\sum p_1}{\sum p_0}\times100$$

P_{01} = प्रचलित वर्ष के मूल्य सूचकांक (Price index number for current year)

$\sum P_1$ = प्रचलित वर्ष में मूल्यों का योग (Total of current year prices)

$\sum P_0$ = आधार वर्ष में मूल्यों का योग (Total of base year prices)

Illustration 2: निम्नलिखित समंकों के वर्ष 2005 के लिए सूचकांक वर्ष 2004 को आधार मानकर तैयार कीजिए ।

Article	Price in 2004	Price in 2005
A	40	60
B	110	100
C	150	200

Solution : Calculation of Price Index Number.

Article	Price in (Rs.)	Price in (Rs.)
A	40	60
B	110	100
C	150	200
	$\sum P0=300$	$\sum P1=360$

$$P_{01}= \frac{\sum p_1}{\sum p_0}\times100 \quad =\frac{360}{300}\times100 \quad =120 \text{ Ans.}$$

आधार वर्ष 2004 की अपेक्षा वर्ष 2005 में मूल्यों में (120 - 100) 20% वृद्धि हुई है ।

(ii) मूल्यानुपातों की औसत विधि : इस विधि के अन्तर्गत प्रचलित वर्ष का सूचकांक बनाने के लिए प्रत्येक वस्तु का मूल्यानुपात ज्ञात किया जाता है स्थिर आधार के मूल्य को 100 मानकर प्रचलित वर्ष का ज्ञात किया गया प्रतिशत ही मूल्यानुपात कहलाता है ।

$$\text{Price Relative} = \frac{\text{Price of current year (p1) x100}}{\text{Price of base year (P0)}}$$

Illustration 3: निम्न समंकों से वर्ष 2004 को आधार मानते हुए मूल्यानुपातो की साधारण औसत विधि से वर्ष 2005 के लिए सूचकांक तैयार कीजिए ।

Article :	A	B	C	D	E
Price in RS. 2004 :	10	4	15	2	20
Price in Rs. 2005 :	12	5	18	3	22

Solution: Calculation of Index Number by Average of Relative Method.

Article	Price in Rs.		Price Relatives
	2004 P_0	2005 P_1	R= P_1/P_0 x 100
A	10	12	$\frac{12}{10}\times100=120$
B	4	5	$\frac{5}{4}\times100=125$
C	15	18	$\frac{18}{15}\times100=120$
D	2	3	$\frac{3}{2}\times100=150$
E	20	22	$\frac{22}{20}\times100=110$
			Σ R = 625

Average of Price Relative Method

$$P_{01} = \frac{\sum R}{N} = \frac{625}{5} = Rs.125 Ans.$$

(ब) बहु-वर्षीय माध्य के आधार पर:

जब कोई वर्ष नहीं मिलता है जिसमें कोई असमान्य घटना घटित न हुई हो । यदि ऐसे असामान्य वर्ष को आधार मान लिया जाये तो सूचकांक वास्तविक स्थिति को प्रकट नहीं करते हैं । ऐसी दशा में कुछ वर्षों के माध्य मूल्य निकालकर उन्हें ही आधार माना जाता है । इसमें असामान्य घटनाओं के मूल्य पर होने वाले प्रभाव नष्ट हो जाते हैं और निष्कर्ष शुद्ध निकलते हैं । इस विधि के अन्तर्गत निम्न कार्य किये जाते हैं :

(i) निश्चित वर्षों का औसत मूल्य ज्ञात करना । यही आधार मूल्य (P_0) होता है ।

(ii) मूल्यानुपात ज्ञात करना अर्थात् $R = \frac{p_1}{P_0}\times100$

(iii) मूल्यानुपात का योग (ΣR) करना ।

(iv) मूल्यानुपात के योग (ΣR) में वस्तुओं की संख्या का भाग देकर भजनफल ज्ञात करना । यही सूचकांक होगा ।

Illustration 4 : निम्नांकित समँकों से (i)2003 के मूल्यों को आधार तथा (ii) औंसत मूल्यों को आधार मानते हुए थोक मूल्य निर्देशांक की गणना कीजिए

Articles	Price in Rs. 2003	2004	2005
A	2	4	6
B	4	4	7
C	5	12	13
D	10	8	12

Solution: (i) Calculation of Wholesale Price Index

	Price in Rs. 2003	Price in Rs. 2004	Relatives 2005	$(p_1 \div p_0)/100$ R 2003	2004	2005
A	2	4	6	100	200	300
B	4	4	7	100	100	175
C	5	12	13	100	240	260
D	10	8	12	100	80	120
Total of relatives ΣR				400	620	855
Average relatives ΣR / N				100	155	214

(ii) Calculation of Index Nos. using average price as base

Articles	2003	2004	2005	Total	Po	Price relatives 2003	2004	2005
A	2	4	6	12	4	50	100	150
B	4	4	7	15	5	80	80	140
C	5	12	13	30	10	50	120	130
D	10	8	12	30	10	100	80	120
Total relatives (ΣR)						280	380	540
Average relatives						70	95	135

(ΣR /
N)

Illustration 5:

निम्नलिखित से औसत मूल्य को आधार मानते हुए तीन वर्ष के सूचकांक तैयार कीजिए:

Years	Unit	Commodity A	Commodity B	Commodity C
2003	Price per rupee	3 Kg.	4 kg.	2 kg.
2004	Price per rupee	3.5 kg.	5 kg.	2 kg.
2005	Price per rupee	3.5 kg.	5.5 kg.	2.5 kg

Solution: इन परिमाण मूल्यों को द्रव्य मूल्यों में परिवर्तित कर लेगें और फिर सूचकांक ज्ञात करेंगे, क्योंकि परिमाण मूल्यों (quantity price) से ज्ञात किये गये सूचकांक द्रव्य मूल्य के निर्देशांकों से ठीक उल्टे होते हैं अत: यह मूल्यों की सही स्थिति को प्रकट नहीं करते हैं । हमने प्रति किलो का मूल्य ज्ञात किया है ।

Calculation of Index Numbers

Articles	Rate per kg.				Average price p_0	Price relative or P.R.		
	2003	2004	2005	Total		2003	2004	2005
A	.33	.29	.29	.91	.30	110	97	97
B	.25	.20	.18	.63	.21	119	95	86
C	.50	.50	.40	1.40	.47	106	106	85
Total relative(ΣR)						335	298	268
Average relatives (ΣR / N)						112	99	89

श्रंखला आधार रीति

जब वर्ष-प्रतिवर्ष के मूल्य परिवर्तनों को आपस में तुलना करनी हो तो श्रृंखला आधार रीति का प्रयोग किया जाता है । श्रृंखला आधार रीति में प्रत्येक वर्ष के मूल्य उससे ठीक पूर्व वर्ष से सम्बन्धित होते हैं न कि किसी स्थायी अवधि से । इस रीति में प्रचलित वर्ष के सूचकांक ज्ञात करने में ठीक पिछला वर्ष आधार वर्ष (P_0) मानते हैं । इसके सूत्र निम्न हैं :-

(i) Link Relative $= \frac{Current Year's Price}{Previous Year's Price} \times 100$

(ii) माध्य की गणना : प्रत्येक वर्ष के सभी श्रृंखला मूल्यानुपातों (L.R.) का योग करके उसका माध्य ज्ञात करेंगे (Average of L.R.)

Illustration 6: निम्न समंको से श्रृंखला सूचकांक ज्ञात कीजिऐ।

Year :	2001	2002	2003	2004	2005
Price (in Rs.) :	75	50	60	60	75

Solution: **Calculation of Chain Indices**

Years	Price in Rs.	Index number
2001	75	
2002	50	$\frac{50}{75}\times 100 = 66.7$
2003	60	$\frac{60}{50}\times 100 = 120.0$
2004	60	$\frac{60}{60}\times 100 = 100.0$
2005	75	$\frac{75}{60}\times 100 = 125.0$

7.10 आधार वर्ष परिवर्तन

सूचकांकों का प्रयोग करते समय आधार वर्ष परिवर्तन की आवश्यकता मुख्यत: दो कारणों से होती है:-

(i) यदि पहला आधार बहुत पुराना और अनुपयुक्त हो गया है और उससे तुलना करना बहुत सार्थक न रहा हो तो ऐसी स्थिति में किसी दूसरे वर्ष को आधार वर्ष मानकर सूचकांक बनाये जाते हैं । (ii) यदि दो सूचकांक श्रेणियों में, जिनकी रचना भिन्न-भिन्न आधार पर की गई हो, तुलना करने हेतु यह आवश्यक हो जाता है कि उनके आधार वर्ष एक से ही हों ।

(i) स्थिर आधार वर्ष में परिवर्तन :

$$New\ Index\ No. = \frac{Old\ Index\ No. of\ curernt\ Year}{Old\ Index\ No. of\ new base\ Year} \times 100$$

इस सूत्र का उपयोग गुणोत्तर माध्य की स्थिति में किया जाता है ।

(ii) श्रृंखला आधार वर्ष में परिवर्तन :

$$New Chain\ Base\ Index\ No. = \frac{Curent\ Year's\ C.B.I.\ No.}{New base\ Year's\ Old\ C.B.I} \times 100$$

Illustration 7: निम्नलिखित सूचकांक 2000 वर्ष के आधार पर आधारित है ।

Year :	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Index No. :	100	120	180	200	225	250	300

2000 से आधार (A)2003 और (B)2006 में परिवर्तित कीजिए ।

Solution: Calculation of Index number by Shifting Method

Years	Index	Index number	
	2000 = 100	2003= 100	2006 = 100

2000	100	$\frac{100}{200}\times100=50.0$	$\frac{100}{300}\times100=33.3$
2001	120	$\frac{120}{200}\times100=60.0$	$\frac{120}{300}\times100=40.0$
2002	180	$\frac{180}{200}\times100=90.0$	$\frac{180}{300}\times100=60.0$
2003	200	$\frac{200}{200}\times100=100.0$	$\frac{200}{300}\times100=66.7$
2004	225	$\frac{225}{200}\times100=112.5$	$\frac{225}{300}\times100=75.0$
2005	250	$\frac{250}{200}\times100=125.0$	$\frac{250}{300}\times100=83.3$
2006	300	$\frac{300}{200}\times100=150.0$	$\frac{300}{300}\times100=100$

7.11 सूचकाँकों का शिरोबन्धन

कई बार निश्चित वर्ष को आधार मानकर बनाये गये सूचकांक बन्द कर देते है तथा बन्द किये गये वर्ष को आधार मानकर नये सूचकॉक बनाये जाते है । ऐसी स्थिति में सूचकांकों की दो श्रेणियाँ तैयार हो जाती है । दोनों श्रेणियों में पारस्परिक तुलना तथा स्थिरता नहीं रह पाती है अत: इन दोनों श्रेणियाँ को मिलाकर किसी भी एक आधार पर सम्पूर्ण अवधि के सूचकाँको को ज्ञात करते है, जिसे शिरोबन्धन या संयोजन (Splicing) कहते है । पुरानी श्रेणी के आधार पर नई श्रृंखला को परिवर्तित करना (Forward splicing) तथा नई श्रेणी के आधार पर पुरानी श्रृंखला को (Backward splicing) परिवर्तित करना कहते हे । सूत्र निम्न है:-

(i) पुरानी श्रेणी के आधार पर नई श्रृखला को परिवर्तित करना (forward splicing)

$$\text{Re}\,quired\ index=\frac{Old\ Index\,nos\ of\ new\,base\ year\ X\ Index\,nos.to\,be\,adjusted.}{100}$$

(ii) नई श्रृंखला के आधार पर पुरानी सुखला को परिवर्तित करना (For backward splicing)

$$\text{Re}\,quired\ index=\frac{100\,XI\ ndex\,numbers\,to\,be\,adjusted}{Old\ index\,numbers\,of\ new\,base\ year}$$

Illustration 8: नीचे सूचकाँको की दो श्रेणियां दी गई हैं, एक 1997 को आधार मानकर और दूसरी 2001 को आधार मानकर ।

Years :	1997	98	99	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Index no. A series	100	105	110	120	125					
Index no. B series					100	105	110	116	125	140

नई श्रृंखला (2001 = 100) को पुरानी श्रेणी से तथा पुरानी श्रेणी को नई श्रेणी में शिरोबन्धित कीजिए जिससे सूचकाँकों की एक सतत् श्रेणी 1997 = 100 से उपलब्ध हो सके ।

Solution: Splicing of two index number series

Year	Index A -Series	Index B - series	Index nos. spliced forward to series A (1997) as base)	Index nos. spliced Backward to B series (2001as base)
1997	100	-	-	$\frac{100\times100}{125}=80$
1998	105	-	-	$\frac{105\times100}{125}=84$
1999	110	-	-	$\frac{110\times100}{125}=88$
2000	120	-	-	$\frac{120\times100}{125}=96$
2001	125	100	$\frac{100\times125}{100}=125.00$	-
2002	-	105	$\frac{105\times125}{100}=131.25$	-
2003	-	110	$\frac{110\times125}{100}=137.20$	-
2004	-	116	$\frac{116\times125}{100}=145.00$	-
2005	-	125	$\frac{125\times125}{100}=156.25$	
2006	-	140	$\frac{140\times125}{100}=175.00$	

7.12 सूचकाँकों की अपस्फीति

सामान्य मूल्य स्तर में होने वाले परिवर्तनों के आधार पर मौद्रिक मजदूरी या आय से वास्तविक मजदूरी या आय ज्ञात करने को सूचकाँकों की अपस्फीति कहते है । व्यक्तियों की मजदूरी या आय में वृद्धि होती है लेकिन जब मूल्य स्तर में उससे भी अधिक गति से वृद्धि होती है तो वास्तविक आय कम होती है । इसी को ज्ञात करने के लिए अपस्फीति का अध्ययन किया जाता है । संशोधन द्वारा नकद मजदूरी या आय से वास्तविक मजदूरीया आय (Real wages or Income) ज्ञात हो जाती है जिसके सूत्र निम्न है:-

$$Real\,Wages\,or\,Real\,income\,\frac{Money\,Wages\,or\,income}{Price\,index\,or\,cost\,of\,living\,index}\times100$$

$$Real\,Wages\,or\,Real\,income\,\frac{Real\,Wages\,of\,the\,current\,year}{Real\,Wages\,of\,the\,base\,year}\times100$$

Illustration 9: निम्न सारणी एक अध्यापक का मासिक औसत वेतन और गत 7 वर्षों की अवधि के मूल्यों का सामान्य निर्देशक बताती है ।

Year :	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Incomes in Rs.	360	420	500	550	600	640	680
General Index :	100	104	115	160	250	290	300

वास्तविक औसत वेतन और वर्ष 1999 के आधार पर वेतन सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

Solution: Calculation of Real Monthly Salary and Real Salary Index

Year	Income in Rs.	General Index	Real Salary (Rs.)	Real Salary Index Nos.
1999	360	100	$\frac{360}{100}\times100=360.00$	$\frac{360}{360}\times100=100.0$
2000	420	104	$\frac{420}{104}\times100=403.80$	$\frac{403.80}{360}\times100=112.20$
2001	500	115	$\frac{500}{115}\times100=434.80$	$\frac{434.80}{360}\times100=120.78$
2002	550	160	$\frac{550}{160}\times100=343.80$	$\frac{343.80}{360}\times100=95.50$
2003	600	250	$\frac{600}{250}\times100=240.00$	$\frac{240.00}{360}\times100=66.67$
2004	640	290	$\frac{640}{290}\times100=220.68$	$\frac{220.68}{360}\times100=61.30$
2005	680	300	$\frac{680}{300}\times100=226.67$	$\frac{226.67}{360}\times100=62.97$

7.13 शब्दावली (Glossary)

1. **आधार वर्ष के मूल्य** : ऐसा वर्ष जिस को आधार वर्ष मानते हुए अन्य वर्ष के सूचकांक ज्ञात किया जाता है । आधार वर्ष का सूचकांक सदैव 100 माना जाता है ।
2. **मूल्य सूचकांक** : दो अवधियों के बीच विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों को मूल्य सूचकांक कहते है जैसे- थोक मूल्य सूचकांक, फुटकर मूल्य सूचकांक ।
3. **मात्रा सूचकांक** : विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन, विक्रय एवं वितरण तथा उपभोग सम्बन्धी क्रियाओं में होने वाले परिवर्तनों को मात्रा सूचकांक कहते है ।
4. **विशेष सूचकांक**. किसी विशेष घटना के परिवर्तनों का माप करने हेतु जो सूचकांक बनाये जाते है उसे विशेष सूचकांक कहते है ।
5. **प्रत्यक्ष सुनिश्चित भार** : ऐसे भार उत्पादन, विक्रय, आयात तथा निर्यात के आधार पर अलग-अलग तय किये जाते है । भार दो प्रकार के होते है (i) मात्रा भार (ii) मूल्य भार।

6. **अप्रत्यक्ष या परोक्ष भार** : अप्रत्यक्ष भार की स्थिति में वस्तु के महत्व के अनुसार उसे भार प्रदान किया जाता है ।

7.14 स्वपरख प्रश्न (Self Checking Question)

प्रश्न 1 सूचकांक क्या है? आर्थिक तथा व्यवसायिक अध्ययनों के लिए सूचकाँको का क्या महत्व है?

प्रश्न 2 सूचकांक क्या है? यह किस उद्देश्य की पूर्ति करता है? थोक मूल्यों के सूचकाँको की रचना में अपनायी जाने वाली विधि का संक्षिप्त में वर्णन कीजिए ।

प्रश्न 3 (अ) सूचकांक क्या है? सूचकाँको की रचना सम्बन्धी समस्याओं को समझाइये ।
(ब) सूचकाँकों की रचना में आधार वर्ष तथा भारांकन के महत्व का वर्णन कीजिए ।

प्रश्न 4 "सूचकांक आर्थिक वायु मापक यन्त्र है ।' इस कथन की व्याख्या कीजिये तथा यह बताइये कि किसी प्रकाशित सूचकांक का प्रयोग करते समय किस प्रकार की सावधानियाँ ध्यान में रखनी चाहिए?

प्रश्न 5 आधार परिवर्तन किसे कहते 'है? सूचकांक के आधार को कब परिवर्तित करने की आवश्यकता होती है? उदाहरण देकर समझाइये ।

प्रश्न 6 शिरोबन्धन से आप क्या समझते है? यह कैसे तैयार किये जाते है?

प्रश्न 7 सूचकाँकों की अपस्फीति से आप क्या समझते हैं? अपस्फीति की गणना किस प्रकार की जाती है?

प्रश्न 8 निम्नलिखित समंको (i) 1997 के आधार पर (ii) 2004 के आधार पर सूचकांक की रचना कीजिए

Year	Price of Wheat Per k.g	Year	Price of wheat Per k.g.
1997	4	2002	10
1998	5	2003	9
1999	6	2004	10
2000	7	2005	11
2001	8		

Answer:

(i) 100 125 150 175 200 250 225 250 275

(ii) 40 50 60 70 80 100 90 100 110

प्रश्न 9. निम्नलिखित समँकों के आधार पर 2003 को आधार वर्ष मानते हुए (i) समूही विधि तथा (ii) मूल्यानुपात औसत विधि से सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

Articles	Unit	Price (RS.) 2003	2004	2005
A	Quintal	1200	1500	1800

B	Litre	3	4	5
C	Metre	10	12	14
D	Kilograme	5	7	8
E	Number	200	250	280

Answer (i)125.04,148.59,(ii)128.6151.34

प्रश्न 10. माध्य मूल्य को आधार मानकर निम्न समँकों से मूल्य सूचकांक बनाइए : Year

Years	Wheat	Price per quintal (Rs.)	
		Cotton	Oil
2000	99	15	20
2001	99	20	25
2002	100	25	30

Answer: 85;100;115.3

प्रश्न 11. निम्न समंकों से श्रृंखला सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

Year :	2000	2001	2002	2003	2004
Prices in Rs.	10	12	15	18	27
Answer:	100	120	125	120	150

Splicing of Index Number:-

प्रश्न 12. नीचे दो श्रेणियों के सूचकांक दिए गए हैं । प्रथम श्रेणी को द्वितीय से शिरोबन्धित तथा द्वितीय को भी प्रथम श्रेणी से शिरोबन्धित कीजिए ।

Years :	1996	1997	1998	1999	2000
Index No. A Series :	100	120	160	180	200
Years	2001	2002	2003	2004	2005
Index no. B Series :	100	120	140	150	160

Answer: (i) Forward splice 50, 60, 80, 90,100(ii) backward splice 200,240,280,300,320Defalating of Index Numbers

प्रश्न 13. निम्न समँकों से वास्तविक आय सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

Year :	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Salary :	200	240	350	360	360	400	420
Price Index No.	100	160	280	300	320	350	360

Answer: 100, 75, 62.5, 60, 56.25, 57.15, 58.33.

इकाई-8

भारित सूचकांक

इकाई की रूपरेखा

8.1 उद्देश्य

8.2 भारित सूचकांक का अर्थ

8.3 भार के प्रकार

(i) प्रत्यक्ष भार

(ii) अप्रत्यक्ष भार

8.4 उपभोक्ता का मूल्य सूचकांक

8.5 उपभोक्ता का मूल्य सूचकांक की उपयोगिता उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की विधियाँ

8.7 मात्रा सूचकांक

8.8 अर्द्ध सूचकांक

8.9 भारित समूही विधि के अन्य सूत्र

(i) लेसपेयर की विधि

(ii) पाशे की विधि

(iii) ड्रोबिश्य एवं बाउले की विधि

(iv) मॉर्शल एजवर्थ की विधि

8.10 फिशर का आदर्श सूचकांक

(i) आदर्श सूचकांक सूत्र क्यों कहा जाता है?

(ii) फिशर के सूत्र की कमियाँ

8.11 सूचकांक सूत्रों की उत्तमता के परीक्षण

(i) समय उत्काम्यता परीक्षणं

(ii) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण

(iii) चक्रीय परीक्षण

8.12 शब्दावली

8.13 स्व-परख प्रश्न

8.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन का उद्देश्य निम्न जानकारी प्रदान करना है - . भारित सूचकांक का अर्थ

- भार के प्रकार
- उपभोक्ता मूल्य सुवकांक का अर्थ
- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की उपयोगिता
- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की विधियाँ
- मात्रा सूचकांक
- अर्द्ध सूचकांक

- भारित समूह विधि के अन्य सूत्र
- फिशर का आदर्श सूचकांक
- सूचकांक सूत्रों की उत्तमता के परीक्षण

8.2 भारित सूचकांक का अर्थ

सूचकांक दो प्रकार के हो सकते है:-

(1) अभारित या साधारण सूचकांक- जिसका वर्णन इकाई-7 में किया गया है ।

(2) भारित सूचकांक - विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व के अनुसार उनको भार देकर जो सूचकांक ज्ञात किये जाते है उनको भारित सूचकांक (Weighted Index Number) कहते है । अभारित सूचकांको की अपेक्षा भारित सूचकांक अच्छे माने जाते है । भारांकन विधि सूचकांक के उद्देश्य पर निर्भर करती है । सूचकांको में सम्मलित मूल्यों को भार (weight) वस्तुओं के महत्व के आधार पर दिया जाता है ।

8.3 भार के प्रकार

भार दो प्रकार का हो सकता है-

(1) प्रत्यक्ष भार (Explicit weight)

(2) अप्रत्यक्ष भार (Implicit weight)

प्रत्यक्ष भार का तात्पर्य : वस्तु के महत्व को स्पष्ट करने वाले किसी तथ्य के आधार पर भार निश्चित करना है । जैसे उत्पादन, उपयोग तथा वितरण आदि की संख्यायें । इसमें दो रीतियों से भार प्रदान किये जाते हैं- (1) मात्रा भार (Quantity Weight) (2) मूल्य भार (Value Weight) । जब मात्रा के आधार पर भार कहते है जिसे q शब्द से प्रदर्शित किया जाता है । जबकि मूल्य या अर्द्धभार का तात्पर्य वस्तु के मूल्य तथा मात्रा के गुणनफल के आधार पर देना है जिसे मूल्य (Value) में व्यक्त किया जाता है । सूचकांक बनाते समय मूल्य भार के लिए pxq शब्द का प्रयोग किया जाता है ।

अप्रत्यक्ष भार का तात्पर्य : जिस वस्तु को अधिक भार देना होता है उस वस्तु की कई किस्मों को सम्मलित किया जाता है । जैसे- गेहूं चावल तथा दालें सूचकांको में सम्मलित है । गेहूं की चार किस्मों के, चावल की दो किस्म तथा दालों की तीन किस्मों के मूल्य थकाको में सम्मलित है तो उन्हें क्रमश: 4,2.3, भार दिया जायेगा ।

वास्तविक जीवन निर्वाह सूचकांकों की गणना करने के लिए भार दिया जाना आवश्यक है । भारित सूचकांकों की रचना के लिए वस्तुओं के उनके महत्व के अनुसार भार दिया जाना चाहिए । जैसे नमक की तुलना में गेहूँ को अधिक भार दिया जाना चाहिये । भार प्रदान करने का आधार उस वस्तु पर उपभोक्ता द्वारा किया जाने वाला व्यय भी हो सकता है । भार स्थिर भी हो सकता है और परिवर्तनशील भी । स्थिर भार से तात्पर्य है कि वस्तुओं के लिये भार निश्चित कर दिये जायें तथा सभी स्थानों एवं समंकों के लिए वही भार माने जायें, लेकिन समय और स्थान के साथ-साथ वस्तु पर किये जाने वाले व्यय अलग-अलग हो सकते है । अत: भार परिवर्तनशील होने

चाहिये ताकि सही-सही उपभोक्ता मूल्य सूचकाँको की गणना की जा सके । लेकिन व्यवहार में परिवर्तनशील भार का प्रयोग करना कठिन हो जाता है ।

8.4 उपभोक्ता मूल्य सूच्कांक या जीवन-निर्वाह सूचकांक

सामान्य मूल्य सूचकांकों का निर्माण सामान्य मूल्य स्तर में हुए परिवर्तनों को दर्शाने के लिए किया जाता है । किसी विशिष्ट वर्ग के व्यक्तियों के उद्देश्य को पूर्ण करने हेतु नहीं बनाए जाते । चूँकि सामान्य मूल्य स्तर का परिवर्तन विभिन्न वर्गो के व्यक्तियों को अलग-अलग प्रकार से प्रभावित करता है । सामान्य मूल्य सूचकांक सभी वर्गो के व्यक्ति विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का उपयोग करते हैं तथा विभिन्न वर्गो के व्यक्तियों द्वारा एक प्रकार की वस्तुओं का भी एक ही अनुपात में उपयोग किया जता है । इसे उपभोक्ता मूल्य सूचकांक कहते है । एक ही वर्ग के उपभोक्ता वस्तुओं के एक ही अनुपात का उपभोग नहीं करते है । मूल्यों में निरन्तर वृद्धि हो रही है तथा उपभोक्ता के लिए अपना सामान्य जीवन स्तर बनाये रखने हेतु महँगाई भत्ता निर्धारित करने में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक सहायक होते है । इसके आधार पर मूल्य नियन्त्रण नीति लाग करने तथा न्यूनतम मजदूरी तय करने में सहायक होते है ।

8.5 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की उपयोगिता

(i) मौद्रिक आय में वृद्धि होने से भी वास्तविक आयकम होती हैं, इसका मापन उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की सहायता से किया जाता है ।

(ii) उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की सहायता से बाजार का क्श्लेिषण करने में सुविधा होती है।

(iii) इनकी सहायता से मुद्रा की क्रय-शक्ति का अनुमान लगाया जाता है ।

(iv) सरकार द्वारा मूल्य नीति, आय नीति, न्यूनतम मजदूरी, मूल्य नियन्त्रण तथा राशनिंग आदि को उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की सहायता से निर्धारित किया जाता है ।

(v) श्रम आन्दोलनों में मजदूरी तथा वेतन में वृद्धि की माँग की जाती है जिसे उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की सहायता से प्रबन्ध तथा श्रम दोनों को मजदूरी सम्बन्धी अनुबन्ध करने में सहायता मिलता है ।

8.6 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की विधियाँ

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक रचना के लिए निम्न दो विधियाँ हैं |

(1) सामूहिक व्यय रीति या भारित समूह रीति (Aggregative expenditure method or weighted agg. expenditure method)

(2) मूल्यानुपातों की भारित माध्य रीति या पारिवारिक बजट रीति । (weighted of aerage of relative method of Family buget method.))

1. सामूहिक व्यय रीति

इस रीति में आधार वर्ष के व्यय तथा चालू वर्ष के व्यय (आधार वर्ष की मात्रा के आधार पर) की सापेक्षिक तुलना से सूचकांक ज्ञात किये जाते है । यह विधि इस मान्यता पर आधारित है कि यदि उपभोक्ता पहले जितनी ही मात्रा में वस्तु का उपयोग करता तो उसके व्ययों में वर्तमान कीमतों के अनुसार जितने प्रतिशत वृद्धि होगी वह उसके जीवन निर्वाह को प्रभावित करेगी । अत:

इस विधि में आधार वर्ष की मात्रा का ही उपयोग किया जाता है, चालू वर्ष की मात्रा का नहीं इसे लौसपेयररीति के नाम से भी जाना जाता है ।

निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

P_1 = चालू वर्ष के मूल्य, p_0 आधार वर्ष के मूल्य, q_0आधार वर्ष की मात्रा

Illustration1: निम्न समंकों से सामूंहिक व्यय रीति द्वारा 2004 को आधार मानते हुए 2005 वर्ष के सूचकांक की गणना कीजिए:

From the following data, construct price index numbers for 2005 taking 2004 as base aggregative expenditure method.

Commodities	Per Unit	2004 Price (in Rs.)	Quantity	2005 Price (in Rs.)
A	Per Quintal	3.00	10 Quintal	4.00
B	Per kg.	2.00	20kg.	2.50
C	Per Metre	1.00	5Metres	1.50

Solution: Calculation of Aggreative Expenditure index Numbers.

Commo-dities	Base year price (p_o)	Qty.(q_o)	Current year price (P_1)	Value ($p_o x q_o$)	Methods ($P_1 Q_o$)
A	3.00	10	4.00	30	40.00
B	2.00	20	2.50	40	50.00
C	1.00	5	1.50	5	7.50
				ΣW = 75ΣR	W = 97.50

Aggregative Expenditure Method $P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{97.50 \times 100}{75}$

=130.Rs. Ans.

2. मूल्यानुपातों की भारित माध्य रीति या पारिवारिक बजट रीति

भारित मूल्यानुपात विधि की गणना निम्न प्रकार से की जा सकती है |

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक वस्तु चालू वर्ष के लिए मूल्यानुपात ज्ञात किया जाता हैं |

$$R = \frac{P_1}{P_o} \times 100$$

(ii) प्रत्येक वस्तु के आधार वर्ष का मूल्य (P_o) तथा आधार वर्ष में उपभोग की गई मात्रा (q_o) का गुणा किया जाता है | इनका गुणनफल ही भार (W) माना जाता है |

(iii) प्रत्येक मूल्यनुपात को तत्ससम्बन्धी भार से गुणा करके (RxW) गुणनफल का योग (ΣRW) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iv) अन्त में इस योग (ΣRW) को भारों के योग (ΣW) से भाग दिया जाता है |

$$\text{Family Budget Method} = \frac{\sum RW}{\sum W} \quad or \quad \frac{\sum IW}{\sum W}$$

Illustration: 2 निम्नलिखित समंकों से 2004 को आधार वर्ष मानते हुए 2005 के लिए उपभोक्ता सूचकांक पारिवारिक बजट रीति द्वारा ज्ञात कीजिए |

Articles	Unit	Price in 2004	Quantity in 2004	Price in 2005
A	Per Quintal	16.00	10 Quintals	18.00
B	Per Quintal	12.00	2 Quintals	13.50
C	Per Quintal	8.00	0.5 Quintals	9.00
D	Per metre	2.00	60 meters	2.50
E	Per Kg.	6.00	30 kg.	8.00

Solution: Calculation of Cost of living Index Number

Arti	Unit	Qty.	Price in 2004	Price in 2005	P_0q_0		
		q_0	p_0	p_1	(W)	R	RW
A	Per Quintal	10	16.00	18.00	160	112.50	18,000
B	Per Quintal	2	12.00	13.50	24	112.50	2,700
C	Per Quintal	0.5	8.00	9.00	4	112.50	450
D	Per Meter	60	2.00	2.50	120	125.00	15,000
E	Per Kg.	30	6.00	8.00	180	133.33	24,000
Arti	Total				$\sum W$ =488		$\sum RW$ =60,150

Famlily Budget Method:

$$p_{01} = \frac{\sum RW}{\sum W} = \frac{60,150}{488} = 123.26\, Ans$$

Ilustration 3:

मूल्यानुपातों के भारित माध्य द्वारा निम्न आंकडो से 2003 को आधार वर्ष मानते हुए 2005 के सूचकांक तैयार कीजिये|

Groups	A	B	C	D
Price in 2003	2.0	2.5	3.0	1.0
Price in 2005	4.5	3.2	4.5	1.8
Weights	5.0	7.0	6.0	2.0

Solution : Calculation of Index Number by Weighted Average Relatives Method

Group	Price in		$R = \frac{P_1}{P_o} x100$		Product
	2005 P_1	2003 P_0	R	Weights W	RxW
A	4.50	2.00	225	5	1,125
B	3.20	2.50	128	7	896
C	4.50	3.00	150	6	900
D	1.80	1.00	180	2	360
Total				$\sum W = 20$	$\sum RW = 3,281$

Weighted Average Relatives Method:

$$P_{01} = \frac{\sum RW}{\sum W} = \frac{3,281}{20} = 164.05\, Ans.$$

Illusration 4: निम्न समंकों से भारित सूचकांक तैयार कीजिए ।

Items	Food	Fuel	Clothing	Rent	Others
Indices	350	210	240	150	200
Weights	45	15	19	16	15

Solution : Construction of Weighted Index Numbers

Items	Index Number (R)	Weights (W)	Product (RxW)
Food	350	45	15750
Fuel	210	15	3150
Clothing	240	19	4560
Rent	150	16	2400
Others.	200	15	3000
		$\sum W = 110$	$\sum RW = 28,860$

$$\text{Weighted Index No.} = \frac{\sum RW}{\sum W} = \frac{28860}{110} = 262.36\, Ans.$$

Illustration 5: निम्न समंकों के 2005 के लिए 2004 के आधार पर सामूहिक व्यय रीति तथा पारिवारिक बजट रीति से सूचकांक की कीजिए ।

Items	Quantiy Consumed 2004	Unit	Price 2004 Rs.	Price 2004 Rs.
Rice	4 Quintal	Quintal	50	70
Wheat	3 Quintal	Quintal	60	90
Sugar	20 Kg.	Quintal	500	800
Pulses	5 Kg.	Quintal	200	300
Clothing	20 Metre	Metre	10	15
House rent	One	House	50	150
Fule	40 Kg.	Kg.	2	4
Oil	10 Kg.	Quintal	400	700

Solution: Calculation of C.P. Index by Aggregative Exp. & Family Budget Method

Items	Qty. 2004 q_o	Unit	Prices 2004 p_o	2005 p_1	$p_0 x q_o$ W	$P_0 x q_0$	R	RW
Rice	4 qtl.	Qtl.	50	70	200	280	140	28,000
Wheat	3 qtl.	Qtl.	60	90	180	270	150	27,000
Sugar	20 Kg.	Qtl.	500	800	100	160	160	16,000
Pulses	5 Kg.	Qtl.	200	300	10	15	150	1,500
Clothing	20 M.	M.	10	15	200	300	150	30,000
House rent	One	H.	50	150	50	150	300	15,000
Fuel	40 Kg.	Kg.	2	4	80	160	200	16,000
Oil	10 Kg.	Qtl.	400	700	40	70	175	7,000
					ΣW =860=	$\sum p_1 q_0$ 1,405		$\sum Rw = 1,40,500$

(i) Aggregative Expenditure Method:

(ii) Family Budget Method:

$$\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times 100=\frac{1,405\times 100}{860}$$

= 163.37 Ans.

$$=\frac{\sum RW}{\sum W}=\frac{1,40500}{860}$$

=163.37 Ans.

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में Kg. से Quintal बनाने के $\underline{20Kg}\div 100$ लिए अर्थात .20 क्विटल होंगे अब .20x500=100(W) प्राप्त होंगे इसी प्रकार अन्य होंगे। यदि Quintal से Kg. बनाना है तो Quintal को 100 से गुणा करने पर Kg. प्राप्त होगें।

Illustration 6: किसी शहर के श्रमिक वर्ग के जीवन-निर्वाह से सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों से अवधि A और B के लिए पारिवारिक बजट रीति द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए।

Items	Weights	Price index for the item Period A	Period B
Food	45	110	135
Clothing	9	125	130
Fuel & Lighting	8	110	130
Rent	13	100	110
Miscellaneous	15	115	130

अवधि A और अवधि B में 9% मजदूरी में वृद्धि की गई है | क्या यह पर्याप्त है ?

Solution: Calculation of index Numbers by family Budget Method.

Items	W	Period A		Period B	
		Price Index R	RW	Price Index R	RW
Food	45	110	4950	135	6075
Clothing	9	125	1125	130	1170
Fuel & Lighting	8	110	880	130	1040
Rent	13	100	1300	110	1430
Miscellaneous	15	115	1725	130	1950
Total	$\sum W=90$		$\sum Rw=9,980$		$\sum RW=11,665$

Family Budget Method

Index no. for A$=\frac{\sum RW}{\sum W}$

$=\frac{9980}{90}$ = 110.89 Ans

Index no. for B$=\frac{\sum RW}{\sum W}$

$=\frac{11665}{90}$ = 129.61 Ans.

Increase in cost of living index = $\frac{129.61-110.89}{110.89}\times100$

$\frac{18.72}{110.89}\times100$ = **16.88%** मजदूरी में वृद्धि अपर्याप्त है ।

8.7 मात्रा सूचकांक

कृषि उत्पादन औद्योगिक उत्पादन तथा विक्रय में होने वाले परिवर्तनों को मापने के लिए जो सूचकांक बनाए जाते है, उन्हें मात्रा सूचकांक कहते है । इसका उद्देश्य मात्रा का तुलनात्मक अध्ययन करना है न कि मूल्यों का । मात्रा सूचकांक भी मूल्य सूचकांक की तरह ही बनाये जाते हैं । केवल अन्तर यह है कि मूल्य के स्थान पर मात्रा होती है और शेष प्रक्रिया मूल्य सूचकांकों की जैसी ही है तथा निम्न सूत्र से मात्रानुपात (quantity relatives) ज्ञात करके उनका माध्य निकाल लिया जाता है, यही मात्रा सूचकांक होता है ।

$$Quantity\ Index = \frac{Quantity\ of\ current\ year\times100}{Quantity\ of\ base\ year} \qquad or\ Q_{10} = \frac{q1}{q0}\times100$$

विभिन्न वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व को प्रकट करने के लिए इसकी तुलना में भारित मात्रानुपात विधि (weighted average of relatives) का प्रयोग करना उपयुक्त रहता है ।

लेसपेयर के अनुसार मात्रा सूचकांक :-

$$Q_{01} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}\times100$$

फिशर के अनुसार सूचकांक :-

$$Q_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}\times\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}}\times100$$

पाशे के अनुसार मात्रा सूचकांक :-

$$Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}\times100$$

8.8 मूल्य या अर्ध सूचकांक

जिस प्रकार मात्राओं तथा मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों को मापने के लिए क्रमश: मात्रा सूचकांक और मूल्य सूचकांक बनाये जाते है, उसी प्रकार दो अवधियों के अर्ध या (value) या राशि के परिवर्तनों को मापने के लिए बनाये जाते हैं चालू वर्ष के अर्ध आधार वर्ष के अर्ध के अनुपात को ही व्यक्त करते है अर्थात् इसकी रचना विधि पूर्ववत् वर्णन के अनुसार है |

Value Index = $\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}\times100$

संकेताक्षर: इसमें प्रयुक्त p_1, तथा q_1 वही अर्थ है जो पहले बताया गाया है |

Illustration 7: निम्न समंको से मात्रा एवं मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिऐ |

Article	2003		2005	
	Quantity	Price	Quantity	Price
A	4	8	5	9
5	5	4	6	5

C	6	5	8	7
D	8	4	10	5

Solution: **Calculation of Quantity and Value Index numbers.**

Articles	2003 (Base Year)		2005 (Current Year)					
	q_0	p_0	q_1	p_1	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
A	4	8	5	9	32	36	40	45
B	5	4	6	5	20	25	24	30
C	6	5	8	7	30	42	40	56
D	8	4	10	5	32	40	40	50
Total					114	143	144	181
					$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_1$	$\sum p_1q_1$

Quantity Index Numbers:

1. Laspeyr's Quantity Index Number:

$$= \frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \times 100 = \frac{144 \times 100}{114} = 126.32 \textbf{ Ans.}$$

2. Paasche's Quantity Index Number:

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_o} \times 100 = \frac{181 \times 100}{143} = 126.57 \textbf{ Ans.}$$

3. Fisher Quantity Index Numbers:

$$= 100\sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum P_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}} = \sqrt{\frac{114 \times 181}{114 \times 143}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{26064}{16302}} \times 100 = 1.2644 \text{x} 100 = 126.44 \text{ Ans}$$

4. Value Index Number:

$$= \sqrt{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \times 100}$$

$$= \frac{181}{114} \times 100 = 158.77$$

8.9 फिशर का आदर्श सूचकांक

सूचकांक रचना में आधार वर्ष के स्थिर भारों का प्रयोग करना दोषपूर्ण है क्योकि आधार वर्ष और चालू वर्ष की मात्रा सदा साम्य रहे, यह व्यावहारिक दृष्टि से शुद्ध वह सही नहीं हैं । अन्य शब्दों में, मूल्यों के परिवर्तनों के साथ वर्ष-प्रतिवर्ष वस्तुओं के उपभोग की मात्रा में भी परिवर्तन होते रहते हैं । अत: आधार वर्ष और चालूवर्ष को समान भार प्रदान करना ठीक नहीं है । यही कारण है कि आदर्श सूचकांक की रचना करने हेतु प्रो. फिशर ने आधार वर्ष और चालू वर्ष, दोनों वर्षों में प्रयोग की जाने वाली वस्तुओं की मात्राओं का भार के रूप में प्रयोग करके एक सूत्र बनाया है, जिसके अनुसार आधार वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष के भार से और चालूवर्ष के मूल्यों को उस वर्ष के भार से भारांकित करके गुणोत्तर माध्य ज्ञात किया जाता है । सूत्र निम्न प्रकार से है:-

Fishere's Ideal I.N.(P_{01}) $=100\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}$ or $\sqrt{L\times P}$

(i) आदर्श सूचकांक सूत्र क्यों कहा जाता है? (Why is it called ideal formula):

प्रो. इरविंग फिशर ने सूचकांक के 134 सूत्रों का गहन अध्ययन करने के बाद अपने सूत्र का प्रतिपादन किया जिसे फिशर का आदर्श सूचकांक का सूत्र (Fishere's ideal index number formula)कहते हैं । इसे आदर्श सूचकांक सूत्र कहने के महत्वपूर्ण निम्नलिखित कारण हैं:

(i) यह सूत्र परिवर्तनशील भारों (fluctuating weights) पर आधारित है अर्थात् इसमें आधार वर्ष व चालू वर्ष-दोनों की ही मात्राओं का भारांकित किया जाता है ।

(ii) इसमें भारांकित करने के पश्चात् गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है ।

(iii) यह सूत्र सूचकांक की उत्क्राम्यता- समय उत्क्राम्यता और तत्व उत्क्राम्यता जाँच में पूर्णतया सफल उतरता है ।

(iv) इस सूत्र में किसी भी प्रकार की अभिनत (bias) या पक्षपात नहीं है क्योंकि आधार वर्ष तथा प्रचलित वर्ष के मूल्य व मात्रा का प्रयोग किया जाता है ।

(ii) फिशर के सूत्र की कमियाँ (Limitations):

(i) इस सूत्र से सूचकांक की रचना करने के लिए प्रचलित वर्ष में वस्तु की मात्रा के समंक प्राप्त करने पड़ते है, अत: उनके उपलब्ध न होने पर सूचकांक की रचना नहीं की जा सकती हैं ।

(ii) यह सूत्र चक्रीय परीक्षण को भी सन्तुष्ट नहीं करता है क्योंकि इन सूचकांकों में भार तुलनात्मक अवधियों पर निर्भर करते हैं ।

Illustration 8: निम्न समंकों से फिशर के आदर्श सूचकांक की रचना कीजिए ।

Articles	2004		2005	
	Prince in Rs.	Qty in Kg.	Prince in Rs.	Qty in Kg.
A	10	3	20	4

B	3	4	15	3

Solution: Calculation of Fisher's Ideal Index Numbers

Articles	2004		2005					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	10	3	20	4	60	30	80	40
B	3	4	15	3	60	12	45	9
					$\sum p_1q_0 = 120$	$\sum p_0q_0 = 42$	$\sum p_1q_1 = 125$	$\sum p_0q_1 = 49$

Fisher's Ideal Index Numbers $= 100\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \sum p_0q_1}}$

$= 100\sqrt{\frac{120 \times 125}{42 \times 49}}$ = 100x2.7 = **270 Ans.**

Illustration 9: निम्नलिखित समंकों से फिशर के सूचकांक की रचना कीजिये |

:

Articles	Base Year		Current year	
	Price per unit	Expenditure	Quantity	Expenditure
A	40	240	7	210
B	4	16	8	40
C	45	180	5	250
D	5	25	6	60

Solution: प्रश्न में आधार वर्ष की मात्रा (q_0) तथ्य चालू वर्ष के मूल्य (p_1) की गणना निम्न प्रकार से की गई है|

आधार वर्ष की मात्रा(q_0)= $\frac{Expenditure}{Price\ per\ unit} = \frac{240}{40}$ = 6,4,4,5

चालू वर्ष के मूल्य(p_1)= $\frac{Expenditure}{Quantity} = \frac{210}{7}$ = 30,5,50,10

Calculation of Fisher's Ideal index Number.

Articles	Base Year		Current Year					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	40	6	30	7	180	240	210	280
B	4	4	5	8	20	16	40	32
C	45	4	50	5	200	180	250	225

D	5	5	10	6	50	25	60	30
					$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$
					450	461	560	567

Fisher Ideal Index no.

Ans $=100\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \sum p_0q_1}}$ $=100\sqrt{\frac{450\times560}{461\times567}}$ $=100\sqrt{0.9641}$ = 0.982x100=**98.2**

8.11 सूचकांक सूत्रों की उत्तमता के परीक्षण

सूचकांक की रचना के लिए अनेक सूत्रों का प्रयोग किया जाता है | कोई एक सूत्र ऐसा नहीं जो प्रत्येक परिस्थिति में प्रयोग किया जावे । आदर्श सूचकांक में यह गुण होना चाहिए कि सूचकांक उत्क्राम्यता परीक्षण में खरा उतरे । यह परीक्षण तीन प्रकार के होते है:-

1. समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)
2. तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test)
3. चक्रीय परीक्षण (Circular Test)

(1) समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test): प्रोफेसर फिशर के शब्दों, "निर्देशांक गणना का सूत्र ऐसा होना चाहिए कि वह तुलनात्मक विवेचन के दोनों बन्दुओ के बीच एक समान अनुपात को ही व्यक्त करे, चाहे दोनों में से किसी दो भी आधार माना जावे । अन्य शब्दों में समय उत्क्राम्यता का अर्थ यह है कि किसी भी एक वर्ष को आधार मानकर प्रचलित वर्ष के सूचकांक p01 प्राप्त करें और यदि प्रचलित वर्ष को आधार वर्ष के सूचकांक (p10)ज्ञात किये जावें तो ये एक-दूसरे के व्युत्क्रम (reciprocal) होने चाहिए तथा इनका गुणनफल भी 1 आना चाहिए । जैसे 2000 के आधार पर प्रचलित 2005 का सूचकांक यह बतलाये कि मूल्यों में चौगुनी वृद्धि हो गई तथा 2005 के आधार वर्ष 2006 का सूचकांक यह स्पष्ट करेगा कि मूल्य इसकी तुलना में एक चौथाई रह गया । अर्थात $4\times\frac{1}{4}$ =1, दोनों का गुणनफल 1 ही आता है । इसे समय उत्क्राम्यता परीक्षण कहेंगे । इसका सूत्र निम्न प्रकार से है:-

Time Reversal Test = $P_{01} x P_{10} = 1$

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \qquad P_{10}=\sqrt{\frac{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}}$$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}\times\frac{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}} = \sqrt{1} = 1$$

(2) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test): इस परीक्षण के अनुसार मूल्य सूचकांक और इससे सम्बन्धित मात्रा सूचकांक का गुणनफल कुल मूल्य (Total value) में हुये परिवर्तनों का सही माप होना चाहिए (अर्थात V=PXQ) प्रो. फिशर के शब्दों में हम कहेंगे कि जिस प्रकार हमारे सूत्र के अनुसार यह सम्भव होना चाहिए कि दो समयों के पारस्परिक परिवर्तन से असंगत परिणाम प्राप्त न हों उसी प्रकार यह भी सम्भव होना चाहिए कि मूल्यों और मात्राओं

का आपस में परिवर्तन करने पर भी असंगत परिणाम प्राप्त न हों अर्थात् दोनों राशियों का आपस में गुणा करने से वास्तविक मूल्य-अनुपात (true value ratio)ज्ञात होना चाहिए । इसका सूत्र निम्न प्रकार से है:-

इसका सूत्र निम्न प्रकार से है

$V0_1$ or $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$ then $\frac{P_{01}\times Q_{01}}{V_{01}} = 1$

अत: जो भी सूचकांक उपर्युक्त परीक्षण को संतुष्ट करता है, व तत्व उत्क्राम्यता को भी पूरा करता है फिशर का सूत्र इस जांच में भी पूर्णरूप से सफल रहा है:-

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \qquad Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}}$$

$$P_{01}\times Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\times\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}$$

किसी सूत्र द्वारा निर्मित सूचकांक इस गुण से युक्त है तो हम इसे उस सूत्र की तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test) सफल होंगे ।-

सूत्र: तत्व 100 को त्याग करने पर	P तथा q को परस्पर बदलने के बाद सूत्र	गुणनफल तथा निष्कर्ष $p_{01} = (q_{01} x p_{10})$
लेसपेयर सूचकांक $\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$	$\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0}$	$\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$ x $\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0}$ = $\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$ यह परीक्षण को सन्तुष्ट नहीं करता है |
पाशे-सूचकांक: $\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$	$\frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_1}$	$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ x $\frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_{01}}$ x $\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$ यह परीक्षण को सन्तुष्ट नहीं करता है |
फिशर-सूचकांक: $\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\sum p_0q_1}}$	$\sqrt{\frac{\sum q_0p_1\times\sum q_1p_1}{\sum q_0p_0\sum q_1p_0}}$	$\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\sum p_0q_1}}$ x $\sqrt{\frac{\sum q_1p_0\times\sum q_1p_1}{\sum q_0p_0\times\sum q_0p_1}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$ यह परीक्षण को सन्तुष्ट करता है|

(3) चक्रीय परीक्षण (Circular Test): आदर्श सूचकांक के उपरोक्त दोनों परीक्षणों के अतिरिक्त एक परीक्षण और भी हो सकता है । जिसे चक्रीय परीक्षण कहते है, इसका सूत्र निम्न है:-

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1$$

जैसे हमारे पास 2003,2004 व 2005 के समक दिए हुए हैं । यदि हम 2003 के आधार पर 2004 का सूचकांक (p_{01}) ज्ञात करें और फिर 2004 के आधार पर 2005 का सूचकांक (p_{12}) ज्ञात करें और अन्त में 2005 के आधार 2003 का सूचकांक (p_{20}) ज्ञात करें तो तीनों का गुणनफल यदि '1' के बराबर होगा तो वह सूचकांक उत्तम होगा । चक्रीय परीक्षण उसी समय ठीक रहता है जबकि या तो सूचकांक निर्माण में भार का प्रयोग बिल्कुल न किया गया हो अथवा स्थिर भार का प्रयोग किया गया हो । स्थिर भार का प्रभाव आधार के अनुसार ही रहता है । फिशर द्वारा दिये गये सूत्र में प्राप्त सूचकांक इस परीक्षण में पूरे नहीं उतरते ।

Illustration 10: निम्न समंको से फिशर सूचकांक की गणना तथा बताइए कि यह किस प्रकार से समय तथा तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण की पूर्ति करता है निम्न से 2004 के आधार मानते हुए 2005 के लिए सूचकांक ज्ञात कीजिए |

Year	Article I		Article II		Article III	
	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
2004	5	10	8	6	6	4
2005	4	12	7	7	5	3

Solution: Calculation of Fisher's Ideal Index Numbers.

	2004		2005					
Article	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
I	5	10	4	12	50	60	40	48
II	8	6	7	7	48	56	42	49
III	6	4	5	3	24	18	20	15
					122 $\sum p_0q_0$	144 $\sum p_0q_1$	102 $\sum p_1q_0$	112 $\sum p_1q_1$

Fisher's Ideal Index Numbers:

$$P_{01} = 100 \sqrt{\frac{\sum q_1 p_1 \times \sum p_1 q_1}{\sum q_0 p_0 \sum p_0 q_1}}$$

$$= {}^{100}\sqrt{\frac{102 \times 112}{122134}} = \sqrt{.836 \times .836} \qquad = .836 \times 100 = 83.6 \text{ Ans.}$$

Time Reversal Test: $P_{01} x P_{10} = 1$

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_1 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \sum p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_0 \sum p_1 q_1}}$$

$$\sqrt{\frac{102 \times 112}{122134}} = \sqrt{\frac{122 \times 134}{102112}} = \sqrt{1} = 1$$

फिशर का सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण को पूरा करता है |

Factor Reversal Test: $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

$$Q_{01} = 100\sqrt{\frac{\sum p_0 q_1 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \sum p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt[100]{\frac{134 \times 112}{122102}} = \sqrt[100]{1.098 \times 1.098}$$

=1.098x100 = 109.8

$p_{01} x q_{01}$ = .836 x 1.098 = 0.918 approx.

तथा $\sum p_1 q_1 = \frac{112}{122}$ = 0.918 approx.

$\sum p_0 q_0$

दोनों ही उत्तर समान है अत: समय तथा उत्क्राम्यता परीक्षण भी संतुष्ट होता है

Illustration 11 : निम्न मूल्यों के आधार पर जीवन निर्वाह सूचकांक या पारिवारिक बजट सूचकांक का निर्माण कीजिए|

Groups	Weights	Price in Rs.			
		2001	2002	2003	2004
I	4	15	18	24	30
II	3	6	12	15	8
III	2	2	2	3	3

Solution: Calculation of Cost of Living Index Numbers

Price in Rs.						Price relative p_1 p_0 x100					
Groups	W	2001 p_0	02 p_1	03 p_2	04 p_3	2002 R_1	R_1 W	2003 R_2	R_2 W	2004 R_3	R_3 W
I.	4	15	18	24	30	120	480	160	640	200	960
II.	3	6	12	15	8	200	600	250	750	133	3.40
III.	2	2	2	3	3	100	200	150	300	150	300
$\sum$ W=9						$\sum R_1W$ 1280		$\sum R_2W$ 1690		$\sum R_3W$ 1500	

Index number for 2002

$$= \frac{\sum R_1 W}{\sum W} = \frac{1280}{9} = 142.22$$

Index Numbers for 2003:

Index Numbers for 2004:

$$= \frac{\sum R_1 W}{\sum W} = \frac{1500}{9} = 166.67$$

$$= \frac{\sum R_1 W}{\sum W} = \frac{1690}{9} = 187.78$$

Illustration 12:

निम्नांकित सूचना से (i) उक्त व्यय विधि द्वारा तथा (ii) पारिवारिक बजट विधि द्वारा 2000 के आधार पर 2002 और 2003 के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की गणना कीजिये ।

Items	Quantity Consumed	Unit	Price in Rs.	Price in Rs.	Price in Rs.
			2000	2002	2003
Wheat	2 Quintal	Quintal	100	150.00	250.00
Rice	25 Kg.	Quintal	200	240.00	320.00
Pulses	10 Kg.	Quintal	160	240.00	320.00
Ghee	10 Kg.	Kg.	13	15.60	19.50
Oil	0.25 Quintal	Kg.	4	6.00	10.00
Clothing	50 Metre	Metre	4	4.50	5.00
Fuel	4 Quintal	Quintal	16	20.00	24.00
Rent	1 House	House	40	50.00	80.00

Solution: (i) Calculation of Consumer Price Index by Aggregative Expenditure Method.

Items	Quantity	Unit	Price in Rs.					
			2000	2002	2003			
	q_0		p_0	p_1	p_2	p_0q_0	p_1q_0	p_2q_0
Wheat	2 Quintal	Qtl.	100	150.00	250.00	200	300	500
Rice	25 Kg.	Qtl.	200	240.00	320.00	50	60	80
Pulses	10 Kg.	Qtl.	160	240.00	320.00	16	24	32
Ghee	10 Kg.	Kg.	13	15.60	19.50	130	156	195
Oil	0.25 Quintal	Kg.	4	6.00	10.00	100	150	250
Clothing	50 Meter	Met.	4	4.50	5.00	200	225	250
Fuel	4 Quintal	Qtl.	16	20.00	24.00	64	80	96
Rent	1 House	H.	40	50.00	80.00	40	50	80
Total						800= $\sum$	1045= $\sum p_1q_0$	1483= $\sum p_2q_0$

						p_0q_0		

Consumer Price Index for 2002

$$P_{01} = \frac{\sum p_1q_0 \times 100}{p_0q_0}$$

$$= \frac{1045}{800} \times 100 = 130.62 \text{ Ans.}$$

Consumer Price Index for 2003

$$P_{01} = \frac{\sum p_2q_0 \times 100}{p_0q_0}$$

$$= \frac{1483}{800} \times 100 = 185.37$$

Solution: (ii) Consumer Price Index Numbers by family Budget Method.

Item	Qty.	Unit	Price in Rs.							
			2000	2002	2003	W				
			P_0	P_1	P_2	P_0q_0	R_1	R_1W	R_2	R_2W
Wheat	2 Qtl.	Qtl.	100	150.00	250.00	200	150.0	30,000	250	50,000
Rice	25 Kg.	Qtl.	200	240.00	320.00	50	120.0	6,000	160	8,000
Pulses	10 Kg.	Qtl.	160	240.00	320.00	16	150.0	2,400	200	3,200
Ghee	10 Kg.	Kg.	13	15.60	19.50	130	120.0	15,600	250	19,500
Oil	25 Qtl.	Kg.	4	6.00	10.00	100	150.0	15,000	250	25,000
Clothing	50 Met.	Met.	4	4.50	5.00	200	112.5	22,500	125	25,000
Fuel	4 Qtl.	Qtl.	16	20.00	24.00	64	125.0	8,000	150	9,600
Rent	1 House.	House	40	50.00	80.00	40	125.0	5,000	200	8,000
Total				$\sum W=800$			$\sum R_1W=1,04,500$ $\sum R_2W = 1,48,300$			

Consumer Price Index for 2002

$$P_{01} = \frac{\sum R_1 W}{\sum W} = \frac{1,04,500}{800}$$

= 130.62 Ans.

Consumer Price Index for 2003

$$P_{02} = \frac{\sum R_2 W}{\sum W} = \frac{1,48,300}{800}$$

=185.37 Ans.

Illustration: 13 निम्नलिखित समंकों से फिशर के आदर्श स्तकांक तथा चालू वर्ष के लिए मात्रा सूचकांक की रचना कीजिए:

	2004 Base Year		2005 Current year	
Articles	Price (Rs.) per unit	Total (Rs.) expenditure	Total (Rs.) expenditure	Quantity (Kgs.)
A	3	150	280	28
B	1	100	120	60
C	2	120	180	30
D	5	150	144	12
E	4	160	216	18

यह भी सिद्ध कीजिए कि फिशर का आदर्श सूचकांक सूत्र तत्व उत्क्राम्यत परीक्षण को सन्तुष्ट करता है|

Solution: Calculation of Fisher's Ideal Index Numbers.

	Base year		Current year					
Articles	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	3	50	10	28	500	150	280	84
B	1	100	2	60	200	100	120	60
C	2	60	6	30	360	120	180	60
D	5	30	12	12	360	150	144	60
E	4	40	12	18	480	160	216	72
Total					1900 $\sum p_1q_0$	680 $\sum p_0q_0$	940 $\sum p_1q_1$	336 $\sum p_0q_1$

1. Fisher's Ideal Index No. = $100\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \sum p_0 q_1}}$

$$= 100\sqrt{\frac{1900}{680} \times \frac{940}{336}} = 100\sqrt{2.8 \times 2.8}$$ = 100x2.8 = **280 Ans.**

Factor Reversal Test: $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0\times\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0\,\Sigma p_0 q_1}}\times\sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1\times\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0\,\Sigma p_1 q_0}}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\frac{1900}{680}\times\frac{940}{336}\times\frac{336}{680}\times\frac{940}{1900}}$$

$$=\sqrt{\frac{940}{680}\times\frac{940}{680}}$$

$$=\frac{940}{680}=\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}=1.382$$

अतः तत्व उत्क्राम्यत परीक्षण पूर्ण होता है |

2. Fisher's Quantity Index No. =

$$=100\sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1\times\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0\,\Sigma q_0 p_1}}$$

$$=100\sqrt{\frac{336}{680}\times\frac{940}{1900}}$$

$$=100\sqrt{.4941\times.4947}=100\times.4644=$$ **49.44 Ans.**

Illustration: 14 निम्न समंकों से फिशर के आदर्श सूचकांक की गणना कीजिए तथा यह बताइए कि यह सूत्र समय उत्क्राम्यता तत्व उत्क्राम्यता दोनों परीक्षण को संतुष्ट करता है ।

Articles	Price (Rs.) 2003	Quantity(Kg.)	Price (Rs.) 2004	Quantity (Kg.) 2004
A	6	50	9	55
B	2	100	3	125
C	4	60	6	65
D	10	30	14	25

Solution: Calculation of Fisher's Ideal Index numbers

Articles	Price (p_0)	Qty.(q_0)	Price (p_1)	Qty.(q_1)	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	6	50	9	55	450	300	495	330
B	2	100	3	125	300	200	375	250
C	4	60	6	65	360	240	390	260
D	10	30	14	25	420	300	350	250
Total					1,530	1,040	1,610	1,090
					Σp_1q_0	Σp_0q_0	Σp_1q_1	Σp_0q_1

Fisher's Ideal Index No. = $100\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}$

= $100\sqrt{\frac{1530}{1040} \times \frac{1610}{1090}}$ = $100\sqrt{\frac{24633}{11336}}$ **=147.41 Ans**

Time Reversal Test = $P_{01} \times P_{10} = 1$

$P_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \sum p_0q_1}}$ $=\sqrt{\frac{1530}{1040} \times \frac{1610}{1090}}$ P_{10} = $\sqrt{\frac{\sum p_0q_1 \times \sum p_0q_0}{\sum p_1q_1 \sum p_1q_0}} = \sqrt{\frac{1090}{1610} \times \frac{1040}{1530}}$

$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{1530}{1040} \times \frac{1610}{1090} \times \frac{1090}{1610} \times \frac{1040}{1530}}$ $\sqrt{1} \quad = 1$

समय उत्क्राम्यता परीक्षण पूर्ण होता हैं ।

Factor Reversal Test = $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

$P_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \sum p_0q_1}} = \sqrt{\frac{1530}{1040} \times \frac{1610}{1090}}$ $Q_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_0q_1 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \sum p_0q_1}} = \sqrt{\frac{1090}{1040} \times \frac{1610}{1530}}$

$P_{01} \times P_{01} = \sqrt{\frac{1530}{1040} \times \frac{1610}{1090} \times \frac{1090}{1040} \times \frac{1610}{1530}} = \sqrt{\frac{1610}{1040} \times \frac{1610}{1040}}$ or $\frac{1610}{1040}$ or $\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0} = \frac{1610}{1040}$

=1.548 Ans.

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण पूर्ण होता है ।

Illustration: 15 वर्ष 2006 में आगरा के फुटकर मूल्य का सूचकांक 204.6 था । निश्चित अवधि के मूल्यों में प्रतिशत वृद्धि इस प्रकार थी: किराया व कर 65, वस्त्र 220, ईंधन व प्रकाश 110, विविध 125 । खाद्य समूह के मूल्य में क्या प्रतिशत वृद्धि हुई? समूहों के विभिन्न मदों का भार इस प्रकार था: खाद्य 60, किराया व कर 16, वस्त्र 12, ईंधन व प्रकाश 8 और विविध 4.

Solution: Calculation of Index Numbers.

Groups	% Increase I	Weights W	IW
Food	X	60	60X
Rent and Rates	65	16	1040
Clothing	220	12	2640
Fuel and Light	110	8	880
Miscellaneous	125	4	500
Total		$\sum$ W = 100	$\sum$ IW= 5060+60x

माना कि खाद्य वर्ग में प्रतिशत वृद्धि x है चूकि सूचकांक 204.6 था, अत उक्त अवधि से सूचकांक में प्रतिशत (204.6 -100)=104.6 वृद्धि हुई ।

So $\frac{\sum IW}{\sum W}$ or $\frac{5060+60\times}{100}$ = 104.6 या 5060+60x = 104.60

Or 60x = 10460=5060 अथवा x= $\frac{5400}{60}$ = x = 90

Ans. अत: खाद्य वर्ग में 90 प्रतिशत वृद्धि हुई ।

Illustration: 16 निम्न समंक श्रमिकों के जीवन निर्वाह सूचकांकों से सम्बन्धित है । यह प्रस्ताव है कि श्रमिकों को महँगाई भत्ता इनके आधार पर निश्चित किया जाए जिससे कि खाद्यान्न व कपड़ों की मूल्य वृद्धि की पूर्णरूप से क्षतिपूर्ति की जा सके । मजदूरी का कितना प्रतिशत महंगाई भत्ता निश्चित किया जाए?

Items :	Food	Clothing	Fuel	Rent	Misc.
Indices:	300	350	200	280	140
Weights:	50	10	5	15	20

Solution : खाद्यान्न एवं कपड़ों की मूल्य वृद्धि की पूर्णरूप से क्षतिपूर्ति करने के लिए महंगाई भत्ता निश्चित करना इस प्रश्न की समस्या है । इसलिए इन दोनों के सूचकांकों के अतिरिक्त अन्य वर्गो के सूचकांको को 100 मानकर भारित सूचकांक ज्ञात किये जायेंगे ।

Items	Indices(R)	Weights (W)	R x W
Food	300	50	15000
Clothing	350	10	3500
Fuel	100	5	500
Rent	100	15	1500
Misc.	100	20	2000
Total		$\sum$ W=100	$\sum$ RW = 22500

Index no. $\frac{\sum RW}{\sum W} = \frac{22500}{100}$ = 225

नोट: इससे स्पष्ट है कि खाद्यान्न तथा कपड़े के मूल्य 100 से बढ़कर 225 हो गए हैं अर्थात् मूल्य वृद्धि 225 - 100=125 प्रतिशत है । अत: महंगाई भत्ता मजदूरी का 125 प्रतिशत मिलना चाहिए ।

Illustration: 17 (अ) किसी समंक समूह के पाशे तथा फिशर के सूचकांक निम्न प्रकार हैं:- फिशर का सूचकांक = 132.73 पाशे का सूचकांक = 131.50, लेसपेयर के सूचकांक की गणना कीजिए ।

(ब) किसी समंक समूह के लिए बाउले तथा लौसपेयरके सूचकांक निम्न प्रकार है: बाउले का सूचकांक = 150 और लौसपेयरका सूचकांक 180 । पाशे के सूचकांक की गणना कीजिए ।

Solution: (a) Given F = 132.73, P=131.50, L=?

F = L x P

$(132.73)^2 = L \times 131.5.$

$131.5^L = 17617.25$: $L = 133.97$ ans

(b) Given: B=150, L = 180, p = ?

Bowley 's $= \frac{L+P}{2}$

$150 = \frac{180+P}{2}$

150x2 = 180+P

P = 300-180 = **120 Ans.**

F फिशर, P = पाशे, L = लेसपेयर, B = बाउले

8.12 शब्दावली (Glossary)

1. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index) उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का तात्पर्य है कि किसी वर्ग विशेष के द्वारा प्रयोग में लाई जाने वाली वस्तुओं के मूल्यों में हुए परिवर्तनों को व्यक्त करते है ।
2. अप्रत्यक्ष भार (Implicit Weight) अप्रत्यक्ष भार से तात्पर्य जिस वस्तु की अधिक भार देना है उस वस्तु की कई किस्मों को सम्मलित किया जाता है ।
3. प्रत्यक्ष भार (Explicit weight) प्रत्यक्ष भार से तात्पर्य वस्तु के महत्व के अनुसार भार देते हुए भार निश्चित किये जाते है ।
4. लेसपेयर विधि (Laspeyre's Method) इस विधि में आधार वर्ष की मात्रा (q_0) को भार के रूप में मानते है । आधार वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष की मात्रा से गुणा कर तथा चालू वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष की मात्रा से गुणा करके, सूत्र के द्वारा सूचकांक ज्ञात किया जाता है ।
5. पाशे विधि:- (Paasche's Method) इस विधि में चालू वर्ष की मात्रा (q_1) को भार मानते है । आधार वर्ष के मूल्यों को चालू वर्ष की मात्रा से गुणा कर तथा चालू वर्ष के मूल्यों को चालू वर्ष की मात्रा से गुणा करके, सूत्र के द्वारा सूचकांक ज्ञात किया जाता है।
6. फिशर का सूचकांक (Fisher's & Index Number) इस विधि में आधार वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष के भार से तथा चालू वर्ष के मूल्यों को उस वर्ष के भार से भारंकित करके गुणोत्तर माध्य ज्ञात किया जाता है अन्य शब्दों में फिशर का सूत्र लेसपेयर तथा पाशे के सूत्रों का गुणोत्तर माध्य है ।

8.13 स्वपरख प्रश्न (Self Checking Questions)

प्रश्न 1. जीवन निर्वाह सूचकांक किसे कहते हैं? इसकी रचना में क्या कठिनाइयाँ आती हैं?

प्रश्न 2. जीवन निर्वाह सूचकांक किसे कहते हैं? इसकी उपयोगिता का वर्णन कीजिए ।

प्रश्न 3. जीवन निर्वाह सूचकांक की रचना करते समय भार का निर्धारण करने तथा आधार का चयन करते समय किन-किन बातों का ध्यान रखेंगे?

प्रश्न 4. फिशर के आदर्श सूचकांक से आपका क्या आशय है? इसे आदर्श क्यों कहते हैं?

प्रश्न 5. लौसपेयर तथा पाशे के मूल्य सूचकांक की परिभाषा दीजिये । पाशे का सूचकांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को सन्तुष्ट करता है या नहीं स्पष्ट कीजिए ।

प्रश्न 6. समय उत्क्राम्यता व तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण किसे कहते हैं? फिशर के सूचकांकों को आदर्श सूत्र इन्हें किस प्रकार सन्तुष्ट करता है?

प्रश्न 7. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए:

(i) तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण

(ii) समय उत्क्राम्यता परीक्षण

(iii) फिशर का आदर्श सूचकांक

(iv) उपभोक्ता मूल्य सूचकांक

प्रश्न 8. एक शहर के मध्यमवर्गीय परिवारों के बजट अनुसंधान द्वारा निम्न सूचना प्राप्त की गई है ।-

Expenses	Food	Rent	Clothing	Fuel	Misc.
Weights	35%	15%	20%	10%	20%
Price (2003)Rs.	150	30	75	25	40
Price (2004)Rs.	145	30	65	23	45

2004 के लिये सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

Answer: Index No. 97.87

प्रश्न 9. पारिवारिक बजट विधि का प्रयोग करते हुए जीवन निर्वाह सूचकांक की रचना कीजिए ।

Articles	Quantity consumed	Units	Price in 2003	Price in 2004
Wheat	20Kgs.	Kg.	1.25	1.50
Rice	6Kgs.	Kg.	3.50	3.00
Grain	.05qtl.	Kg.	0.80	1.20
Pulses	8Kgs.	Kg.	2.50	4.00
Ghee	2Kg.	Kg.	12.50	11.00
Sugar	10Kg.	Per qtl.	150.00	150.00
H.Rent	-	Per room	40.00	50.00

Answer: index nos. = 115.33

प्रश्न 10. नीचे दी हुई सारणी से जीवन-निर्वाह सूचकांक की रचना कीजिए ।

Groups	Index for 2005	Expenditure
Food	550	46%
Clothing	215	10%

Fuel & Lighting	220	7%
House rent	150	12%
Miscellaneous	275	25%

Answer: Index nos. = 376.65

प्रश्न 11. निम्न समंकों से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की गणना कीजिए ।

Groups	Weights	Index numbers
Food	71	370
Clothing	3	423
Fuel	9	469
House rent	7	110
Miscellaneous	10	279

Answer: Index no. 353.20

प्रश्न 12. किसी शहर के श्रमिक वर्ग के जीवन-निर्वाह से सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों से अवधि A और B के लिए सूचकांक कीजिए ।

Items	Price Index for the item		
	Weights	Period A	Period B
Food	48	110	130
Clothing	8	120	125
Fuel & Lighting	7	110	120
House rent	13	100	100
Miscellaneous	14	115	135

Answer: Index nos. = 110.2 & 125.2 Increase.

प्रश्न 13. निम्न समंकों से 2004 के आधार पर 2005 के अपराध सूचकांकों गणना कीजिए । '

From the following data calculate index numbers for 2005 taking price of 2004 as base

	2004	2005	Weights
Robberies	13	8	6
Car thefts	15	22	5
Scooter picking	249	185	4
Pocket picking	328	259	1
Thefts by servants	497	448	2

Answer. Index no.92.17

प्रश्न 14. निम्नलिखित समंकों से 2003 को आधार मानकर 2005 के लिए पारिवारिक बजट रीति से जीवन -निर्वाह सूचकांक बनाइये।

Articles	Quantity consumed	Unit	Price in Rs.	
			2003	2005
Wheat	5qtl.	Per qtl.	1000	1200
Bajra	2qtl.	Per qtl.	500	750
Jawar	1qtl.	Per qtl.	600	900
Moong	1qtl.	Per qtl.	1000	1400
Ghee	10Kgs.	Per qtl.	5000	6500
Gur	40Kgs.	Per qtl.	800	1600
Sugar	50Kgs.	Per qtl.	2000	3400
Salt	10Kgs.	Per qtl.	50	60
Fuel	5qtl.	Per qtl.	100	160
Rent	1 House	Per House	500	800

Answer; Index nos. = 138.09

प्रश्न 15. निम्न समंकों से लेसपेयर, पाशे तथा फिशर आदर्श विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए|

Articles	Base year Price	Current year Quantity	Price	Quantity
A	4	2	6	3
B	5	4	7	6
C	3	6	4	7
D	2	3	3	5

Answer: Index no. (i) 140.38 (ii) 141.10 (iii) 140.74

प्रश्न 16. निम्न समंकों से लेसपेयर, पाशे तथा फिशर आदर्श विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिये|

	Wheat		Rice		Oil	
Year	Qty.	Price	Qty.	Price	Qty.	Price
2003	10	1.0	12	5.0	5	8.0
2005	8	1.5	10	6.0	2	10.0

Answer; (i) 124.5 (ii) 124.3 (iii) 124.4

प्रश्न 17. निम्न समंकों के आधार पर फिशर के आदर्श सूचकांक की गणना कीजिए ।

Articles	Wheat		Rice		Oil	
Year	Qty.	Price	Qty.	Price	Qty.	Price
2004	15	14	5	20	10	4
2005	12	24	4	27	8	7

Answer: Index no. = 161

प्रश्न 18. निम्न समंकों से फिशर के आदर्श सूचकांक की गणना कीजिए तथा यह बताइये कि यह तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण को किस प्रकार सन्तुष्ट करता है?

	Base year		Current year	
Commodity	Price in Rs.	Quantity	Price in Rs.	Quantity
A	10	15	12	12
B	3	10	4	10
C	5	100	4	120
D	7	70	8	50

Answer; Index no. 98.5

प्रश्न 19. निम्न समंकों से फिशर के आदर्श सूचकांक की गणना कीजिए तथा यह बताइये कि यह समय तथा तत्व उत्क्राम्यत परीक्षण को किस प्रकार सन्तुष्ट करती है?

	2004		2005	
Articles	Expenditure in Rs.	Price in Rs.	Expenditure in Rs.	Price
A	300	10	150	10
B	400	8	250	25
C	420	7	200	40

Answer: Index no. = 282.6

प्रश्न 20. निम्नलिखित समंकों से फिशर आदर्श सूचकांक की रचना कीजिए:

	Base year 2003		Current year 2004	
Articles	Price per unit	Expenditure	Price per unit	Expenditure
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

Answer Index no. = 218.97

प्रश्न 21. निम्न समंको के आधार पर भारित सूचकांक मूल्यानुपात तथा फिशर की आदर्श विधि द्वारा ज्ञात कीजिए|

Price in Base Year	Quantity in Base Year	Price in Current Year	Quantity in Current Year
1	2	7	11
2	4	8	12
3	5	9	13

4	6	10	14

Answer: Index no. (i) 308.16 (ii) 319.14

इकाई - 9

व्यावसायिक पूर्वानुमान

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

9.1 प्रस्तावना

9.2 पूर्वानुमान का अर्थ

9.3 व्यावसायिक पुर्वानुमान की मान्यताएँ

9.4 व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रमुख विशेषताएँ

9.5 पूर्वानुमान का आधार

9.6 व्यावसायिक पूर्वानुमान के उद्देश्य

9.7 व्यावसायिक पूर्वानुमान की उपयोगिता

9.8 व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीक के प्रकार

9.9 व्यावसायिक पूर्वानुमान के सिद्धान्त

9.10 सारांश

9.11 शब्दावली

9.12 स्वपरख प्रश्न

9.0 उद्देश्य

- इस इकाई का अध्ययन करने बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि
- व्यावसायिक पूर्वानुमान का अर्थ स्पष्ट कर सकें,
- व्यावसायिक पूर्वानुमान के महत्व को स्पष्ट कर सके ।
- व्यावसायिक पूर्वानुमान की मान्यताओं के संबंध में ज्ञान प्राप्त कर सके
- पूर्वानुमान के उन पहलुओं का वर्णन कर सके जिसके आधार पर व्यावसायिक पूर्वानुमान किए जाते है ।
- व्यावसायिक पूर्वानुमान की उपयोगिता का वर्णन कर सके ।
- व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीक के प्रकार का वर्णन कर सके ।

9.1 प्रस्तावना

“वर्तमान में रहकर भविष्य के बारे में अनुमान लगाना एक गणितीय, तार्किक. मनावैज्ञानिक व सांख्यिकीय विद्या है। सांख्यिकी अंक अनुमानों में विशेष रूप से लाभकारी होते है।”

भविष्य के बारे में पूर्वानुमान लगाना अथवा भावी घटनाओं के बारे में उत्सुकता प्रकट करना मानवीय व्यवहार का एक अभिन्न अंग है । यह पूर्व-कल्पनाएँ मात्र आर्थिक क्षेत्र में ही की जाती हो, ऐसी बात नही है । पुत्र अथवा पुत्री के जन्म और जीवन-साथी के भावी संजोग से लेकर, युवा सन्तान से बुढ़ापे में मिलने वाले सुख व दुःख की पूर्व-कल्पना मनुष्य सदैव करता

रहता है । कहने का अभिप्राय यह है कि मानवीय व्यवहार की प्रत्येक क्रिया पूर्वानुमानों के बीच झूलती रहती है और इस मनोवृत्ति का मात्र कारण, वास्तविकता को जाने बिना सम्भावना से कोरा आनन्द उठाना है, जो आगे चलकर सकारात्मक भी हो सकता है और नकारात्मक भी, चूँकि आशा ही जीवन का दूसरा नाम है । अत: मानव इस कगार पर चढ़ने के लिए सदैव तत्पर रहता है भले ही उसकी बुनियाद बहुत कमजोर हो ।

9.2 पूर्वानुमान का अर्थ

1. "व्यावहारिक पूर्वानुमान किसी काल श्रेणी के भूत तथा वर्तमान घटनाओं की गति के उस संख्यात्मक विश्लेषण का कहते है जिसके द्वारा उस श्रेणी के भविष्य की प्रवृत्ति का आभास होता है ।

-प्रो. नीटर एवं वासर मैन

2. "संख्यात्मक, तथ्यों के भूतकालीन व्यवहार के आधार पर भविष्य के लिये काल-श्रेणी को विस्तृत या विक्षेपित करने की क्रिया की पूर्वानुमान कहते है ।"

-श्री मोरोने

3. "पूर्वानुमान का उद्देश्य समस्त उपलब्ध समंको के आधार पर आर्थिक क्रियाओं के सम्भावित व्यवहार का यथासम्भव शुद्धता से पता लगाना तथा उन सम्भविताओ के आधार पर नीतियों का निर्धारण करना होता है ।"

-डॉ. लियो बार्नस्

4. "संख्यात्मक या अंकों में व्यक्त तथ्यों के भूतकालीन व्यवहार के आधार पर भविष्य के लिए काल श्रेणी को विस्तृत या विक्षेपित करने की क्रिया को सांख्यिकी में पुर्वानुमान कहते है ।"

-सिम्पसन तथा काफ्का

5. "व्यावसायिक पूर्वानुमान व्यवसाय के निर्णयों तथा दीर्घकालीन योजनाओं में सन्निहित जोखिम को कम करने के उद्देश्य से सांख्यिकीय आकड़ों तथा अन्य आर्थिक, राजनीतिक एवं विपणन सूचनाओं का विश्लेषण है ।"

-लियोनार्ड एस. सिल्क

6. "पूर्वानुमान भविष्य की स्थिति के अनुमान से अधिक कुछ नही है ।" **-एण्डरसन**

अन्य शब्दों में, **भूतकालीन तथा. वर्तमान दशाओं के विश्लेषण के आधार पर भावी व्यावसायिक स्थितियों का अनुमान लगाने की विधि को व्यावसायिक पूर्वानुमान कहते है ।** व्यावसायिक पूर्वानुमान केवल विक्रय, उत्पादन तथा लाभ आदि से सम्बन्धित आँकड़ों को अनुमानित करने की क्रिया मात्र ही नही है बल्कि उपलब्ध समंकों का वह संख्यात्मक विश्लेषण है जिससे कि सर्वोपयुक्त रीति द्वारा सम्भाव्य भावी परिस्थितियों का सामना करने के लिए लाभप्रद नीति का निर्धारण किया जा सके ।

9.3 व्यावसायिक पूर्वानुमान की मान्यताएँ

1. प्रथम मान्यता यह है कि आर्थिक क्षेत्र में आकस्मिक और गम्भीर परिवर्तन नहीं होते वरन् धीरे-धीरे नियमानुसार परिवर्तन होते है ।
2. दूसरी मान्यता यह है कि जो कुछ भूत में हो चुका है और वर्तमान में हो रहा है भविष्य में भी वैसा ही होगा बशर्ते कि परिस्थितियाँ समान बनी रहे ।
3. पूर्वानुमान करने वाला व्यक्ति अनुभवी एवं निष्पक्ष होने के साथ ही साथ सांख्यिकीय रीतियों से पूर्णतया परिचित है ।

9.4 व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रमुख विशेषताएँ

उपर्युक्त परिभाषाओं के विश्लेषण से व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रमुख विशेषताएँ निम्न है:

1. व्यावसायिक पुर्वानुमान भविष्य से सम्बन्धित होते है ।
2. व्यावसायिक पूर्वानुमान भूतकालीन अनुभवों एवं भावी सम्भावनाओं पर विश्लेषण किया जाता है ।
3. वर्तमान परिस्थितियों का भूतकालीन अनुभवों एवं भावी सम्भावनाओं पर विश्लेषण किया जाता है ।
4. विश्लेषण हेतु सांख्यिकीय एवं गणितीय विधियों का प्रयोग किया जाता है साथ ही व्यक्तिगत अवलोकन को भी महत्व देते है ।
5. व्यावसायिक पूर्वानुमान पूर्व निश्चित उद्देश्यों को ध्यान में रखकर लगाया जाता है ।
6. व्यावसायिक पूर्वानुमान में सम्भावित परिवर्तनों को भी ध्यान में रखकर भावी सम्भावनाओं का विश्लेषण किया जाता हैं
7. व्यावसायिक पूर्वानुमान में सांख्यिकीय एवं गणितीय विधियों का प्रयोग किया जाता है ।

9.5 पूर्वानुमान का आधार

'पूर्वानुमान के आधार' से हमारा तात्पर्य पूर्वानुमान के उन अंगों अर्थात् पहलुओं से है, जिनके आधार पर व्यावसायिक पूर्वानुमान किया जाता है । इसके मुख्यत: निम्नलिखित दो आधार है ।

(अ) भूतकालीन परिस्थितियों का विश्लेषण - भूतकालीन परिस्थितियों का विश्लेषण करने से हमें यह पता लग जाता है कि भूतकाल में व्यापारिक दशाओं में किस-किस प्रकार के परिवर्तन हुए, उनके कारण क्या थे? और व्यवसाय की गति पर उनका क्या गहरा प्रभाव पड़ा? ध्यान रहे, व्यावसायिक पूर्वानुमान के लिए काल श्रेणी में होने वाले इन चार प्रकार के परिवर्तनों का अध्ययन करना आवश्यकता समझा जाता है-उपनति (Trend), चक्रीय उच्चावन (Cyclical Oscillations), मौसमी परिवर्तनों (seasonal Movements), विचरण और दैव या अनियमित उच्चावन (Random or Irregular Fluctuation) । उन्नति से यह पता चलता है कि भूतकाल में व्यवसाय की प्रवृत्ति क्या रही है और भविष्य में क्या दशा होगी । चक्रीय

उच्चावन से तेजी व मन्दी की भूत अथवा भावी दशाओं का ज्ञान होता है और आर्त्तव विचरण शीघ्र होने वाले परिवर्तनों को प्रकट करता है ।

(ब) वर्तमान दशाओं का विश्लेषण - भूतकालीन परिस्थितियों का विश्लेषण करने के साथ-साथ वर्तमान आर्थिक दशाओं यथा नये आविष्यकार, जनता की रूचि, फैशन व रीति-रिवाज आदि में परिवर्तन, सरकार की आर्थिक, औद्योगिक, मौद्रिक एवं प्रशुल्क नीति तथा युद्ध आदि का भी विश्लेषण करना पड़ता हैं क्योंकि पूर्वानुमानों पर इन वर्तमान दशाओं का पर्याप्त प्रभाव पड़ता है ।

9.6 व्यावसायिक पूर्वानुमान के उद्देश्य

व्यावसायिक पूर्वानुमान का प्रमुख उद्देश्य भूतकालीन आकड़ों का विश्लेषण और वर्तमान परिवर्तनों का अध्ययन करके यह संकेत देना है कि भविष्य में क्या होने की सम्भावना है जिससे उपयोगकर्ता इन सम्भाव्य परिस्थितियों के आधार पर अपनी भावी नीतियाँ निर्धारित कर सके । पूर्वानुमान पूर्ण रूप से यथार्थ नहीं हो सकते, वे तो केवल दिशासूचक है। इन पूर्वानुमानों को भविष्यवाणी की तरह लेना निहायत मूर्खता होगी ।

लियो बार्नस् ने इस सम्बन्ध में कहा है कि "व्यावसायिक पूर्वानुमान का उद्देश्य समस्त उपलब्ध समंकों के आधार पर आर्थिक क्रिया से सम्भावित व्यवहार को, यथासम्भव परिशुद्धता के अनुरूप प्रतिस्थापित करना तथा उन सम्भावनाओं के आधार पर नीतियाँ निर्धारित करना है । "संक्षेप में, व्यावसायिक पूर्वानुमान के मुख्य उद्देश्य निम्नलिखित है :

1. भावी नीति-निर्धारण का आधार प्रस्तुत करना
2. व्यावसायिक चक्रों से उत्पन्न होने वाली जोखिमों को कम करना ।
3. वास्तविक आँकडो तथा पुर्वानुमानिक आँकड़ों से तुलना करके विचलनों के कारणों का पता लगाना ।
4. व्यावसायिक पूर्वानुमान भविष्य में आने वाली अवसाद एवं समृद्धि की दशाओं का पूर्व संकेत देने का कार्य करते है।
5. व्यावसायिक निर्णयों में सहायता करना ।
6. पूर्वानुमान में विक्रय की मात्रा का अनुमान प्रायिकता सिद्धान्त के आधार पर लगाना ।
7. व्यवसाय के अधिकतम लाभ के उद्देश्य को पूरा करना ।

9.7 व्यावसायिक पूर्वानुमान की उपयोगिता

आज की जटिल उत्पादन व्यवस्था (Complex Production System) में, जहाँ विशेष रूप से 'प्रत्यक्ष उत्पादन' का स्थान 'परोक्ष उत्पादन' ने ले लिया हो, व्यावसायिक पूर्वानुमान का अपना एक विशेष महत्व हैं । व्यावसायिक पूर्वानुमान का लाभ मात्र व्यवसायी को होता है, ऐसी बात नहीं है । सत्यता तो यह है कि समाज के सभी वर्ग व्यावसायिक पूर्वानुमान से लाभान्वित होते है जैसे कि नीचे स्पष्ट किया जाता है :

1. व्यवसायी को लाभ- प्रत्येक व्यवसायी का अन्तिम उद्देश्य अधिकतम लाभ कमाना है । जिसके के लिए वह प्राय: पूर्वानुमान का सहारा लेता है । एक व्यवसायी को अपनी वस्तु की भावी

माँग,उसका सम्भावित मूल्य, उपभोक्ताओं की क्रय-शक्ति, कच्चे माल की भावी स्थिति, आयात-निर्यात की स्थिति, पूँजी व साख-नीति, सरकारी नीति तथा जनता की रूचि व फैशन आदि तथ्यों का पूर्वानुमान करना पड़ता हैं यदि उसके अनुमान सही बैठते है तो उसे लाभ होगा अन्यथा असफलता होगी । इसका अभिप्राय यह हुआ हे कि व्यवसायी की सफलता अथवा उसके अनुमानों की शुद्धता अथवा अशुद्धता पर निर्भर करती है । एक सफल व्यापारी वही है जिसके अनुमान परिशुद्धता के निकटतम होते है ।

2. व्यापार चक्रों को निरन्तर करने में - व्यावसायिक पूर्वानुमान भविष्य में आने वाली अवसाद एवं समृद्धि की दशाओं का पूर्व संकेत दे देते है । चूँकि यह दोनों ही दशाएँ अर्थव्यवस्था के लिए घातक मानी जाती है, अत: सरकार और व्यावसायी वर्ग दोनों मिलकर योजनाबद्ध रीतियों से इनको नियन्त्रित करने का प्रयास करते है ताकि उसके विपरीत प्रभाव को कम-से-कम किया जा सके ।

3. समाज के लिए उपयोगी - व्यावसायिक पूर्वानुमान के माध्यम से व्यापार चक्रों को नियन्त्रित करने पर सम्पूर्ण समाज को इसका लाभ पहुँचता है । समाज के सभी वर्गो के रूप में उत्पादक, उपभोक्ता तथा श्रमिक इससे लाभान्वित होते है।

4. अनार्थिक क्रियाओं पर रोक - भ्रष्टाचार, चोरबाजारी व सट्टे जैसी प्रवृतियों को रोकने में व्यवसायिक पूर्वानुमान सहायक सिद्ध होते है ।

5. सरकार के लिए उपयोगी - अर्थ-व्यवसाय में उत्पन्न होने वाली किसी भी प्रकार के असन्तुलनों का पूर्वाभास, सरकार को व्यावसायिक पूर्वानुमान से ही उपलब्ध हो सकता है । सरकार इन दशाओं के उत्पन्न होने से पूर्व ही उसकी समुचित व्यवस्था कर सकती है, जिससे जनता में असन्तोष कम फैलता है और सरकार की लोकप्रियता पूर्ववत् बनी रहती है ।

9.8 व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीक के प्रकार

उपयोगी पूर्वानुमान के लिए आवश्यक है कि ठोस व उचित तकनीक का प्रयोग करके ही पूर्वानुमान किया जाता है । विगत कुछ दशकों में अनेक पूर्वानुमान-तकनीक विकसित हुए है जिनको तीन वर्गो में विभक्त किया जा सकता है-

1. सरल विधि - यह एक सामान्य विधि है, था इसमें यह मान्यता होती है कि भविष्य में एक प्रकार का भूतकाल का ही विस्तार होता है । इस विधि को कोई सैद्धान्तिक आधार नहीं होता है । इससे भविष्य के लिए भूतकाल के आधार पर विस्तार (Projection) कर लिया जाता है ।

2. मापदण्डनीय विधि - इस विधि की मान्यता है कि भूतकाल में घटी कुछ घटनाओं के आधार पर भविष्य पूर्वानुमान किया जा सकता है । किसी विशेष श्रेणी में उच्चावचनों से नियमित रूप से सम्बन्धित सांख्यिकीय व्यवहार का पता लगाकर उसके आधार पर पूर्वानुमान किया करता है । अनेक काल-श्रेणियों में विलम्बना तथा अग्रगमन (Lead and lag) सम्बन्धों को ज्ञात करके पूर्वानुमान किया जाता है । "अत: मापदण्डनीय विधि है के अन्तर्गत सांख्यिकीय निर्देशक अथवा निर्देशकों का प्रयोग निहित है जो इस बात को इंगित करते है कि एक विशिष्ट काल श्रेणी अथवा सामूहिक अर्थ-व्यवस्था किस दशा में अग्रसर हो रही है ।"

3. विश्लेषणात्मक विधि - पूर्वानुमान किये जाने वाले चर मूल्यों पर प्रभावशाली वर्तमान कारणों व शक्तियों का विश्लेषण इस विधि के अन्तर्गत किया जाता है । वर्तमान समंकों के विश्लेषण द्वारा प्रभाव तथा कारण (Cause and effect) को ज्ञात करके तथा कारणों का भविष्य में पडने वाले प्रभाव को ध्यान में रखकर पूर्वानुमान किया जाता है । विश्लेषणात्मक विधि गणितीय अथवा अगणितीय हो सकती है । गणितीय विधि के अन्तर्गत अर्थ-संख्यात्मक सूत्र (Econometric models) सम्मिलित होते हैं । प्रत्येक दशा में इस विधि के अन्तर्गत कार्यशील शक्तियों का सावधानों से विश्लेषण करके उपयोगी सम्बन्धों तथा उनकी मात्राओं (Quantification) को ज्ञात किया जाता है ।

9.9 व्यावसायिक पूर्वानुमान के सिद्धान्त

पहले व्यावसायिक पूर्वानुमान केवल अनुभव एवं आत्मबोध (Intuition) के आधार पर किये जाते थे जिसके पीछे कोई सुनिश्चित वैज्ञानिक आधार नही होता था, लेकिन पिछली दो-तीन दशाब्दियों में पूर्वानुमान की विधियों में बहुत सुधार हुआ है और लगातार शोध क्रिया चल रही है ताकि पूर्वानुमानों को अधिकाधिक वैज्ञानिक एवं विश्वसनीय बनाया जा सके। व्यावसायिक पूर्वानुमान के अनेक सिद्धान्त प्रचलित है, परन्तु निम्नलिखित पाँच सिद्धान्त प्रमुख है:

1. समय-विलम्बना अथवा कालक्रम सिद्धान्त
2. क्रिया-प्रतिक्रिया सिद्धान्त
3. प्रतिकाट आर्थिक विश्लेषण सिद्धान्त
4. विशिष्ट ऐतिहासिक विश्लेषण सिद्धान्त
5. आर्थिक लय सिद्धान्त

1. समय विलम्बना अथवा कालक्रम सिद्धान्त - इस की यह मान्यता है कि व्यावसायिक जगत् के सभी तथ्य एक साथ परिवर्तित नही होते, बल्कि कारण और परिणाम के रूप में एक निश्चित अनुक्रम (Sequence) में परिवर्तित होते है अर्थात् एक परिवर्तन का प्रभाव दूसरे पर पड़ता है और यह दूसरा परिवर्तन तीसरे परिवर्तन का कारण बन जाता है और चौथा-तीसरे का कारण बन जाता है । स्पष्ट है कि व्यावसायिक परिवर्तनों में एक निश्चित काल विलम्बना (Time Lag) होती हैं। जैसे-किसी देश में यदि मुद्रा स्फीति होती है दो परिणामस्वरूप सबसे पहले विदेशी विनिमय दर प्रतिकूल होती है बाद में वस्तुओं की थोक कीमतें बढ़ने लगती है और इसके कुछ समय पश्चात् फुटकर मूल्यों में वृद्धि होती हे, इसके फलस्वरूप जवीन निर्वाह व्यय में वृद्धि होती है और कालान्तर में श्रमिकों एवं कर्मचारियों की क्रमश: मजदूरी दर में तथा महंगाई भले की दर में वृद्धि होती है । इस प्रकार मुद्रा स्फीति ने विभिन्न आर्थिक क्रिया के क्षेत्र को एक साथ नही बल्कि, एक अनुक्रम में प्रभावित किया है । इस सिद्धान्त की प्रमुख बात यही है कि मुख्य समस्या का काल विलम्बना का ठीक निर्धारण किया है तो व्यावसायिक पूर्वानुमान का कार्य सरल हो जाता है तथा पूर्वानुमानों में सत्यता का अंश अधिक प्रतीत होगा, अन्यथा पूर्वानुमान गलत सिद्ध हो जायेंगे तथा उनके आधार पर बनाई गई नीतियाँ हानिकार बन जायेगी ।

अमेरिका की हार्वर्ड आर्थिक सोसाइटी (Harvard Economic Society of U.S.A) जो विभिन्न प्रकार के सूचकांक (Index), जैसे-सट्टा सूचकांक, मुद्रा सूचकांक, व्यापार सूचकांक आदि का निर्माण करती है, वे अपने पूर्वानुमान इसी सिद्धान्त के आधार पर लगाते है । इंग्लैण्ड की लन्दन तथा केम्ब्रिज आर्थिक सेवा संस्था (London and Cambridge Economic Service of U.K) स्वीडन की स्वीडिश व्यापार मंडल (Swedish Board of Trade) आदि भी अपने पूर्वानुमान इसी सिद्धान्त के आधार पर लगाते है । ये प्रोफेशनल समितियाँ काल विलम्बना का सही निर्धारण करने हेतु सह-सम्बन्ध गुणांक तथा बिडरेखीय विधियों का प्रयोग करती है, तथा साथ में तात्कालिक परिस्थितियों के परिवर्तनों पर भी विचार करते हुए व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाती है ।

गुण का लाभ : इस सिद्धान्त के निम्न गुण है

(i) यह सिद्धान्त अत्यन्त सरल है ।

(ii) इस सिद्धान्त से समय अनुक्रम का पता लगाना सम्भव है ।

(iii) व्यावसायिक भावी हानि, पर नियन्त्रण सम्भव है ।

(iv) यह सिद्धान्त सांख्यिकीय विधि पर आधारित है ।

दोष या कमियाँ : इस सिद्धान्त के निम्न दोष है

(i) इस सिद्धान्त का एकपक्षीय अध्ययन सम्भव है, इसमें व्यवसाय की क्रिया से उत्पन्न होने वाली प्रतिक्रिया का अध्ययन नहीं होता है ।

(ii) इसके निष्कर्ष केवल सत्य के निकट (Near to truth) ही होते है, पूर्ण सत्य नही ।

2. क्रिया-प्रतिक्रिया सिद्धान्त : यह सिद्धान्त भौतिक विज्ञान के सिद्धान्त पर आधारित है कि "प्रत्येक क्रिया के लिए सदैव उचित व समान प्रतिक्रिया है । " (For every action there is always an appropriate and equal reaction) ठीक व्यावसायिक क्षेत्र में भी क्रिया-प्रतिक्रिया का सिद्धान्त लागू होता है, जैसे किसी वस्तु का मूल्य अपने सामान्य स्तर (Normal Level) से कम हो जाता है, तो कालान्तर में उस वस्तु की पूर्ति भी कम हो जायेगी और पूर्ति के कम होने पर उस वस्तु का मूल्य बढ़ने लगेगा, मूल्य बढ़ने से फिर पूर्ति बढ़ जायेगी जिससे पुन: मूल्यों में गिरावट आयेगी, इस प्रकार यह चक्र चलता है । स्पष्ट है कि यह सिद्धान्त सामान्य मूल्य के निश्चित स्तर के आधार पर ही व्यावसायिक पूर्वानुमानों का निर्धारण करता है । लेकिन देखा जाए तो सबसे बड़ी समस्या ही सही है कि सामान्य स्तर (Normal Level) का सही निर्धारण कैसे किया जाए क्योंकि सामान्य स्तर स्वयं परिवर्तनशील होता है । इस सिद्धान्त का प्रयोग करते समय इस बात का भी ध्यान रखा जाना चाहिये कि सदैव "परिवर्तन" मात्र "क्रिया एवं प्रतिक्रिया" का परिणाम ही नहीं होता, बल्कि वर्तमान दशायें एवं सम्भावित दशायें भी प्रवाहित करती है । अमेरिका के "व्यवसाय सांख्यिकीय संगठन" की भी मान्यता सही है कि व्यापारिक क्रियाओं का एक निश्चित स्तर सदैव सामान्य होता है, सामान्य से अधिक व कम दशाएँ दीर्घकाल तक नही रहती हैं । इसी सिद्धान्त के अनुसार ही यह संगठन व्यावसायिक पूर्वानुमान लगता है ।

गुण या लाभ : इस सिद्धान्त के निम्न गुण है

(i) इस सिद्धान्त में द्विपक्षीय अध्ययन अर्थात् क्रिया तथा प्रतिक्रिया दोनों का अध्ययन किया जाता है ।

(ii) यह सिद्धान्त सत्य के अधिक निकट (More near to truth) है ।

(iii) यह सिद्धान्त समय विलम्बना सिद्धान्त की अपेक्षा अधिक अच्छा है ।

दोष या कमियाँ : सिद्धान्त के दोष है :

(i) इस सिद्धान्त का दोष है कि सामान्य स्तर के परिवर्तनशील होने के कारण इसके निर्धारण में कठिनाई आती है ।

(ii) प्रत्येक क्रिया एवं प्रतिक्रिया की प्रवृति पूर्ण समानता की ओर नहीं होती है ।

3. प्रतिकाट आर्थिक विश्लेषण सिद्धान्त : जैसा कि इसके नाम से स्पष्ट है कि सिद्धान्त ऐतिहासिक आर्थिक विश्लेषण सिद्धान्त से बिलकुल विपरीत है । यह सिद्धान्त यह मानकर चलता है कि इतिहास अपने को पुन: कभी नही दोहराता, जो भी घटनायें घटती है वे सभी वर्तमान परिस्थितियों के अनुसार ही घटती है, इसका भूतकाल से कोई लेना-देना नही है । इस सिद्धान्त के अन्तर्गत परिपेक्ष के संदर्भ में गहन अध्ययन किया जाता है और भूतकालीन तथ्यों का सहारा न लेकर केवल वर्तमान परिस्थितियों के सही विश्लेषण एवं निर्वचन द्वारा व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाये जाते है । इस सिद्धान्त में व्यापार चक्र एक समान नही होते, वरन् मिलते--जुलते होने के कारण एक से दिखाई देते है ।

गुण या लाभ : इस सिद्धान्त के निम्न गुण है :

(i) इस सिद्धान्त का सर्वप्रथम गुण है कि सभी क्रियाओं का सामूहिक अध्ययन न करके, बल्कि प्रत्येक तथ्य का अलग-अलग अध्ययन किया जाता है ।

(ii) यह सिद्धान्त भूतकालीन तथ्यों पर आधारित नहीं है, बल्कि वर्तमान परिस्थितियों को महत्व देता है ।

(iii) यह सिद्धान्त प्रत्येक कारक के प्रभाव को बताता है ।

दोष या कमियाँ : इस सिद्धान्त के निम्न दोष है

(i) यह सिद्धान्त भूतकालीन परिस्थितियों पर महत्व नही देने से तर्कसंगत नही है ।

(ii) इस सिद्धान्त में वर्तमान परिस्थितियों पर प्रभाव डालने वाले प्रत्येक तथ्य का अलग-अलग अध्ययन करना सम्भव नही है ।

(iii) इस सिद्धान्त से व्यावसायिक पुर्वानुमान लगाना कठिन है ।

4. विशिष्ट ऐतिहासिक विश्लेषण सिद्धान्त : इस सिद्धान्त की प्रमुख मान्यता है कि "इतिहास की पुनरावृत्ति होती है ।" (History repeats itself) अर्थात् इतिहास अपने आपको दोहराता है । लेकिन जब इस सिद्धान्त का प्रयोग किया जाता है तो भूतकाल में एक ऐसी अवधि चुनी जाती है जिसमें व्यावसायिक दशाएँ ठीक उसी प्रकार थी जो वर्तमान समय में पायी जाती है तथा यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि जो परिवर्तन उन भूतकालीन दशाओं के पश्चात् हुए थे वे ही भविष्य में भी होंगे क्योंकि वर्तमान परिस्थितियों भी भूतकाल के समान हैं । पिछले 20 वर्षो से यह पाया गया है कि यदि सामान्य से 20% कम वर्षा होने पर मूँगफली तथा तिलहन के भाव

दुगुने हो गये, इससे यह पूर्वानुमान किया जा सकता है कि जिस वर्ष भी सामान्य 20% वर्षा कम होगी तो मूँगफली एवं तिलहन के भाव प्राय: दुगुने होने की प्रवृत्ति रखेंगे ।

लेकिन व्यवहार में देखा जाए तो वर्तमान एवं भूतकालीन परिस्थितियाँ एक समान मिलेंगी इसकी सम्भावना कम ही होती है । मान लो परिस्थितियाँ एक समान मिल भी जाती है तो वर्तमान की स्थितियों में अन्य और कारण भी जुड़ जाते है जो पुर्वानुमान को प्रभावित कर सकते है । अत: यह आवश्यक हो जाता है कि लगाये गये पूर्वानुमानों में वर्तमान में विशेष परिस्थितियों के आधार पर आवश्यक संशोधन भी कर दिये जायें ।

इस सिद्धान्त का प्रयोग कृषि क्षेत्र में पूर्वानुमान करने के लिए किया जाता है, जैसे-वर्षा एवं तापक्रम, जलवायु एवं मौसम के बारे में भूतकालीन परिस्थितियों से भावी परिस्थितियों का पुर्वानुमान लगाकर रबी एवं खरीफ की फसलों के बारे में पूर्वानुमान लगाया जाता है ।

गुण या लाभ : इस सिद्धान्त के निम्न गुण है:

(i) इस सिद्धान्त का एक गुण यह है कि यह ऐतिहासिक तथ्यों पर आधारित होने से इसके प्राप्त परिणाम पर्याप्त सीमा तक शुद्ध होते है;

(ii) यह सिद्धान्त सरल विधि पर आधारित है ।

(iii) इस सिद्धान्त द्वारा समान भूतकालीन व्यावसायिक परिस्थितियाँ होने पर सही पूर्वानुमान लगने की सम्भावना होती है ।

(iv) इस सिद्धान्त मे सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग किया जाता है ।

दोष या कमियाँ : इस सिद्धान्त के निम्न दोष है:

(i) इस सिद्धानत का दोष है कि इसमें केवल भूतकालीन परिस्थितियों का ही विश्लेषण किया जाता है, वर्तमान परिरिथतियों का नहीं ।

(ii) यह सिद्धान्त पूर्ण रूप से वैज्ञानिक नहीं है ।

(iii) इस सिद्धान्त में समान परिस्थितियों वाले भूतकाल में सम्भव नहीं है ।

5. आर्थिक लय सिद्धान्त : इस सिद्धान्त की आधारभूत मान्यता यह है कि इतिहास की पुनरावृत्ति होती है (History repeats itself), इस सिद्धान्त के अनुसार आर्थिक घटनाएँ लयबद्ध क्रम (Rh6ythmic order) से घटित होती है । इसमें प्राप्त ऐतिहासिक समंकों का विश्लेषण करके उनके संघटकों (Components) का पता लगाकर उन पड़ने वाले विभिन्न प्रकार के उच्चावनो का विस्तार से अध्ययन किया जाता है, तथा दीर्घकालीन प्रवृत्ति के आधार पर भविष्य का पूर्वानुमान लगाया जाता है । इस सिद्धान्त में व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाने के लिए काल श्रेणी की विभिन्न प्रविधियों का प्रयोग (आर्तव विचरण, चक्रीय उच्चावन आदि) किया जाता है, लेकिन व्यवहार में विभिन्न चक्रों की अवधि एवं तीव्रता अलग होने के कारण इस सिद्धान्त के अनुसार लगाये गये पूर्वानुमान अधिक शुद्ध नहीं होते है ।

गुण या लाभ : इस सिद्धान्त के निम्न गुण है:

(i) इस सिद्धान्त का प्रयोग दीर्घकालीन पूर्वानुमान लगाने मे सहायक होता है ।

(ii) इस सिद्धान्त का प्रयोक काल श्रेणी एवं अन्य घटकों (factors) के प्रभावों का पूर्ण विश्लेषण करके, सही निष्कर्ष प्राप्त करने में किया जाता हैं

(iii) काल श्रेणी की गणितीय एवं बिन्दु रेखीय बिन्दु का प्रयोग किया जाता है ।

(iv) इस सिद्धान्त में भूतकालीन परिस्थितियों को अपनाने से पूर्वानुमान लगाने में आसानी होती है ।

दोष या कमियाँ : इस सिद्धान्त के निम्न दोष है:

(i) इस सिद्धान्त का दोष है कि विभिन्न व्यापार चक्रों की अवधि एवं तीव्रता अलग होने के कारण, व्यावसायिक पूर्वानुमान सम्बन्धी निर्णय अधिक शुद्ध नहीं होते है ।

(ii) इस सिद्धान्त में वर्तमान परिस्थितियों पर ध्यान नहीं दिया जाता है ।

9.10 सारांश

सरल शब्दों में, व्यावसायिक पुर्वामान मात्र विक्रय उत्पादन, लाभ आदि सें संबंधित ऑकडों कसे अनुमानित करनें की किया मात्र ही नही वरन उपलब्ध समंको का वह संख्यात्मक विश्लेषण हैं जिससें कि सर्वोपयुक्त रीति द्वारा सम्भाव्य भावी परिस्थितियों का सामना करनें के लिए एक लाभप्रद नीति का निर्धारण किया जा सके ।

व्यावसायिक पुर्वानुमानों के माध्यम से व्यापार चकों को नियमित करनें पर सम्पूर्ण समाज को इसका लाभ पहुँचता हैं जैसे उत्पादक, कृषक, व्यापारी, उपभोक्ता, श्रमिक, कर्मचारी आदि को सम्मिलित किया जाता हैं । व्यावसायिक पूर्वानुमान के माध्यम सें समस्त विकल्पों के प्रभावों का विश्लेषण करके सर्वोतम विकल्प का चयन किया जाता हैं ।

9.11 शब्दावली

पूर्वानुमान (Forecasting)- संख्यात्मक या अंको में व्यक्त तथ्यों के भूतकालीन व्यवहार के आधार पर भविष्य के लिए काल श्रेणी को विस्तृत या विक्षेपित करनें की किया को सांख्यिकी पूर्वानुमान कहते हैं ।

आर्थिक-लय सिद्धान्त "इतिहास की पुनरावृति होती हैं।" इस सिद्धान्त की आधारभूत मान्यता हैं । इस सिद्धान्त के प्रतिपादकों का मत हैं कि आर्थिक तथ्य एक लय में व्यवहार करते हैं। लगभग समान अवधि तथा तीव्रता के चक्रों की पुनरावृति होती रहती हैं । उपलब्ध एतिहासिक संमकों(History data) का विश्लेषण करके उनके (Components) का पता लगाकर उन पर पड़ने वालें विभिन्न प्रकार के उच्चावचनों के प्रभावों को पृथक किया जाता हैं ।

विशिष्ट ऐतिहासिक विश्लेषण इस प्रकार के विश्लेषण की मान्यता यह हैं कि अर्थ-व्यवस्था में कुछ समानताएँ होती हैं, जिन्हें सावधानीपूर्वक विश्लेषण सें ज्ञात किया जा सकता हैं। सभी व्यापारिक चक्रों की ऊंचाई तथा अवधि समान नही होती अत: पुर्वानुमान इतिहास का उपयोग आर्थिक लय के विस्तार के लिए न करके कुछ पूर्व विशेष परिस्थितियों का चयन करता हैं, जिनमें वर्तमान की कुछ विशेषताएँ विद्यमान होती हैं तथा यह निष्कर्ष निकालता हैं कि पूर्व-परिस्थितियों में जों घटना घटी थी, वर्तमान में भी उस जैसी परिस्थिति में वही घटना घटेगी ।

क्रम अथवा विलम्बना-अग्रगमन सिद्धान्त- यह सिद्धान्त इस मान्यता पर आधारित हैं कि अधिकांश व्यापारिक समंको में विलम्बना-अग्रगमन सम्बन्ध पाया जाता हैं ।

क्रिया-प्रतिक्रिया सिद्धान्त- किया प्रतिकिया सिद्धान्त पर आधारित हैं कि "प्रत्येक किया के लिए सदैव उचित व समान प्रतिक्रिया होती हैं" । इस सिद्धान्त के अनुसार व्यापारिक क्रियाओं का एक निश्चित स्तर सदैव सामान्य होता हैं, सामान्य से अधिक व कम दशाएँ अधिक काल तक नही रह सकती हैं । अभिवृद्धि की सीमा व अधिक की प्रतिक्रिया उसी सीमा तथा अवधि के अवसाद काल में अवश्य ही होनी चाहिए ।

पूर्ण विश्लेषण- यह सिद्धांत इस मान्यता पर आधारित हैं कि कोई भी दो चक एक से नही होतें हैं यथा समान कारण एवं समान परिणाम उत्पन्न नही करते हैं । पूर्वानुमान अतीत की प्रवृतियों का भावी अनुमान करनें की उपेक्षा वर्तमान की शक्तियों के ज्ञान व निर्वचन पर आधारित होता हैं ।

9.12 स्वपरख प्रश्न

1. व्यावसायिक पूर्वानुमान पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये ।
2. व्यावसायिक पूर्वानुमान का क्या उार्थ है? इसके क्या उद्देश्य होते है? संक्षेप में व्यावसायिक पूर्वानुमान में प्रयुक्त की जाने वाली प्रमुख रीतियों को समझाइये?
3. व्यावसायिक पूर्वानुमन का अर्थ तथा महत्व बताइये? व्यावसायिक पूर्वानुमान के सिद्धान्तों का विवेचन कीजिये ।
4. "किसी फर्म का दीर्घकालिक अस्तित्व उसके व्यावसायिक वातावरण के सम्बन्ध में पूर्वानुमन लगाने की योग्यता पर निर्भर करता है ।" विवेचना कीजिए ।
5. 'व्यावसाय से अधिकांश सफलता पूर्वानुमानों की परिशुद्धता पर निर्भर करती है ।' व्याख्या कीजिये ।
6. व्यावसायिक पूर्वानुमान की उपयोगिता और सीमाओं का विवेचन कीजिये ।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. परियोजना नियोजन एवं बजटरी नियन्त्रण-अग्रवाल, सारस्वत एवं मिश्रा, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।
2. परिमाणात्मक प्रविधियाँ- एन.पी. अग्रवाल, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।
3. व्यावसायिक सांख्यिकी-ओसवाल, अग्रवाल, भार्गव, तिवाड़ी, मीणा, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

इकाई-10

व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीकें

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

10.1 प्रस्तावना

10.2व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीके

10.2.1 कार्यकारी अधिकारियों की राय

10.2.2 कार्यकर्त्ताओं की राय

10.2.3 बाजार अनुसंधान

10.2.4 सांख्यिकी तकनीकें

10.3 व्यावसायिक पूर्वानुमान की उपयुक्त तकनीक का चुनाव

10.4 व्यावसायिक पूर्वानुमान के प्रमुख चरण

10.5 व्यावसायिक पूर्वानुमान के आवश्यक गुण

10.6 बजट एवं पूर्वानुमान में अन्तर

10.7 व्यावसायिक पूर्वानुमान का महत्व

10.9 विविध उदाहरण

10.10 सारांश

10.11 शब्दावली

10.12 स्वपरख प्रश्न

10.0 उद्देश्य

इस इकाई को अध्ययन करने बे बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि

- व्यावसायिक पूर्वानुमान की विभिन्न तकनीकों का उपयोग कर सके ।
- व्यावसायिक पूर्वानुमान के विभिन्न सिद्धान्तों की व्याख्या कर सके ।
- व्यावसायिक पूर्वानुमान के आवश्यक गुणों का विवेचन कर सकें ।
- सह-सम्बन्ध विश्लेषण से व्यावसायिक पूर्वानुमान कैसे किया जाता है, यह बता सकें ।
- व्यावसायिक पूर्वानुमान की विभिन्न सीमाएँ स्पष्ट कर सकें ।

10.1 प्रस्तावना

व्यावसायिक पूर्वानुमान, व्यावसायिक सफलता की कुन्जी है । व्यावसायिक पूर्वानुमान मात्र व्यक्तिगत ज्ञान, अनुभव एवं कल्पना के माध्यम से नहीं लगाये जाते अपितु वैज्ञानिक विधियों के उपयोग द्‌वारा तथा कुछ निश्चित सिद्धान्तों के आधार पर लगाये जाते हे । इस प्रकार प्राप्त पूर्वानुमान अधिक शुद्ध विशिष्ट एवं वैज्ञानिक होते है ।

10.2 व्यापारिक पूर्वानुमान की तकनीकें अथवा उपकरण

व्यवसायों में व्यावसायिक पूर्वानुमान हेतु अलग-अलग व्यक्तियों द्वारा भिन्न-भिन्न प्रकार की तकनीक अथवा उपकरण प्रयुक्त किए जाते है, लेकिन कोई भी तकनीक दोष रहित नहीं है। इसलिए व्यवहार में विभिन्न तकनीकों का एक साथ उपयोग करके पूर्वानुमान किये जाते है । व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रमुख तकनीकें निम्नलिखित है :

1. कार्यकारी अधिकारियों की राय
2. कार्यकर्त्ताओं की राय
3. बाजार अनुसंधान
4. सांख्यिकीय तकनीकें
   - (i) व्यवसाय मापक यंत्र
   - (ii) बाह्यगणन
   - (iii) कालश्रेणी विश्लेषण
   - (iv) सह-सम्बन्ध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण
   - (v) आगत-निर्गत विश्लेषण
   - (vi) अभिमत या मत सर्वेक्षण
   - (vii) आधुनिक अर्थमितिय विधि
   - (viii) कारण-सूचियन विधि

10.2.1 कार्यकारी अधिकारियों की राय : इस तकनीक के अनुसार प्रत्येक कार्यकारी अपने विभाग से सम्बन्धित गतिविधियां के बारे में पूर्वानुमान लगाता है । उदाहरण के लिए उत्पादन प्रबंधक उत्पादन का पूर्वानुमान लगाता है, विक्रय प्रबन्धक विक्रय का पूर्वानुमान लगाता है तथा सामग्री प्रबन्धक सामग्री का । चूँकि कार्यकारी अधिकारी अपने विभाग की समस्याओं से आत: भिन्न होता है । अत: वह अपने पूर्व अनुभव, कौशल, योग्यता, ज्ञान एवं दूरदर्शिता से पूर्वानुमान कर सकता है ।

लाभ :

(i) यह आसान एवं मितव्ययी है ।

(ii) इस तकनीक में समय कम लगता है, तथा व्यावसायिक पूर्वानुमान शीघ्रता से जाता है ।

(iii) इस तकनीक के द्वारा पूर्वानुमान करने पर कार्यकारी अधिकारियों की योग्यता, अनुभव एवं कौशल का लाभ होता है ।

(iv) किसी विशिष्ट प्रकार के पूर्वानुमान के लिए सम्बन्धित अधिकारी को उत्तरदायी ठहराया जा सकता है ।

दोष :

(i) इस तकनीक में व्यावसायिक पूर्वानुमान कार्यकारी की योग्यता एवं अनुभव पर आधारित होते है । इससे अक्षम कार्यकारी द्वारा किये गए पूर्वानुमान गलत हो सकते है ।

(ii) कार्यकारी के पूर्वाग्रहों का व्यावसायिक पूर्वानुमान पर गलत असर होता है ।

(iii) इस तकनीक में अधिनस्थ कर्मचारियों व निम्न स्तरीय अधिकारियों के अनुभव एवं ज्ञान का लाभ नहीं मिलता है।

10.2.2 कार्यकर्त्ताओं की राय : इस तकनीक से व्यावसायिक पूर्वानुमान का कार्य उन कर्मचारियों व कार्यकर्त्ताओं द्वारा किया जाता है जो उस समस्या अथवा कार्य से निकट रूप से सम्बद्ध होते है । इस तकनीक में संस्था के प्रत्येक विभाग के कर्मचारी अपने विभाग से सम्बन्धित अनुमान तैयार करते है, तथा उनकी जाँच एवं विश्लेषण का कार्य उस विभाग के कार्यकारी द्वारा किया जाता है । कार्यकारी यदि आवश्यक समझे तो उनमें संशोधन भी कर सकते है । कार्यकारी अधिकारियों की स्वीकृति के पश्चात् वे अनुमान पूर्वानुमान का रूप लेते है ।

लाभ :

(i) यह सरल एवं मितव्ययी है ।

(ii) व्यावसायिक पूर्वानुमान अधिक शुद्ध होते है क्योंकि इस तकनीक से पूर्वानुमान उन व्यक्तियों द्वारा तैयार किये जाते हैं जो कार्य से घनिष्ठ रूप से सम्बद्ध होते है ।

(iii) इससे सत्ता के विकेन्द्रीकरण को बढ़ावा मिलता है ।

(iv) उत्तरदायित्व आसानी से निश्चित किया जा सकता है ।

(v) इससे कर्मचारियों की योग्यता एवं अनुभव का लाभ होता है जिससे उनका मनोबल बढ़ता है ।

दोष :

(i) कर्मचारियों की अयोग्यता के कारण पूर्वानुमान अशुद्ध हो सकते है ।

(ii) इस तकनीक से पूर्वानुमान लगाने में अधिक समय लगता है ।

(iii) यह तकनीक नई वस्तु के पूर्वानुमान के लिए अनुपयुक्त है ।

(iv) यह दीर्घकालीन पूर्वानुमान के लिए भी अनुपयुक्त है ।

10.2.3 बाजार अनुसंधान : इस तकनीक से व्यावसायिक पूर्वानुमान के लिए व्यावसायिक संगठन अपने विपणन विभाग के माध्यम से उपभोक्ताओं एवं बाजार का सर्वेक्षण करते है । महँगी होने के कारण यह तकनीक वृहत् व्यवसायों द्वारा ही अपनाई जाती है । इस तकनीक से पूर्वानुमान लगाने हेतु वृहद् वित्तीय एवं मानव संसाधन की आवश्यकता होती है । इस तकनीक से इस बात का सर्वेक्षण किया जाता है कि संस्था द्वारा उत्पादित वस्तु के लिए बाजार कहीं पर है, अब है, तथा किस कीमत पर है । साथ ही शोध का उद्देश्य यह भी जानना होता है कि अधिकतम अथवा अनुकूलतम लाभ अर्जित करने हेतु वस्तु की कितनी मात्रा का उत्पादन किया जाये । बाजार शोध में मुख्यतः उपभोक्ताओं की आय, रूचि, फैशन में परिवर्तन, व्यय के तरीके, सरकार को करारोपण एवं आर्थिक नीति, औद्योगिक नीति, राजनीतिक, देश की सामाजिक-आर्थिक स्थिति इत्यादि का अध्ययन किया जाता हैं । इस तकनीक के द्वारा पूर्वानुमान लगाने हेतु सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग किया जाता है ।

लाभ :

(i) इस तकनीक से किये गये पूर्वानुमान अधिक सही एवं शुद्ध होते हैं क्योंकि यह एक वैज्ञानिक विधि है ।

(ii) इस तकनीक में सभी आन्तरिक एवं बाह्य घटकों का ध्यान रखा जाता है जिससे अधिक विस्तृत अध्ययन संभव होता है ।

(iii) इस तकनीक से प्राप्त परिणामों की शुद्धता की जाँच की जा सकती है ।

दोष :

(i) अपव्ययी होने के कारण केवल वृहत् संस्थाओं द्वारा ही इसे अपनाया जा सकता है ।

(ii) इसमें श्रम एवं समय अधिक लगता है ।

10.2.4 सांख्यिकीय तकनीकें : व्यावसायिक पूर्वानुमान के लिए व्यवसाय-सूचकांकों (Business indices) की रचना की जाती है । इन सूचकांकों के अध्ययन एवं विश्लेषण के द्वारा पूर्वानुमान लगाए जाते हैं । व्यवसाय सूचकांकों को व्यवसाय मापक यंत्र (Business Barometers) अथवा अर्थ मापक यंत्र (Economics Barometers) की संज्ञा भी दी जाती है । ये सूचकांक व्यवसाय की भावी प्रवृत्तियों के संकेतक होते है। व्यवसाय मापन यंत्रों के द्वारा प्रभावी व्यावसायिक प्रवृत्तियों तथा उच्चावनों की जानकारी प्राप्त की जा सकती है । व्यवसाय सूचकांकों की रचना में निम्नलिखित व्यावसायिक तथा आर्थिक सूचकांक श्रृंखलाओं को सम्मिलित किया जाता है :

(अ) सकल राष्ट्रीय उत्पादन

(ब) रोजगार

(स) कृषि उत्पादन

(द) औद्योगिक उत्पादन

(व) थोक मूल्य एवं उपभोक्ता मूल्य

(र) बैंक जमाएँ

(ल) उपभोक्ता साख

(व) शुद्ध राष्ट्रीय उत्पादन

(श) अंशों एवं प्रतिभूतियों के मूल्य

उपर्युक्त वर्णित श्रृंखलाओं के निर्देशांकों को समुचित भार देकर व्यावसायिक क्रिया का सामान्य निर्देशांक (General Index of business activity) ज्ञात किया जाता हे, इसे ही व्यवसाय-मापक यंत्र कहते है ।

व्यवसाय-मापक यंत्र के प्रकार : व्यवसायिक मापक यंत्र निम्नलिखित तीन प्रकार के हो सकते है :

(1) व्यावसायिक क्रिया का सामान्य सूचकांक : यह सामान्य व्यावसायिक क्रिया का मापक यंत्र होता है । यह विभिन्न व्यावसायिक क्रियाओं, जैसे-उत्पादन, व्यापार, वित्त, रोजगार इत्यादि के अलग-अलग सूचकांकों का भारित, सामान्य या संग्रथित (Composite) सूचकांक होता है । इसके द्वारा देश की कुल आर्थिक क्रियाओं की दीर्घकालीन प्रवृत्तियों व चक्रीय उच्चावनों का मापक यन्त्रों का प्रयोग किया जाता है ।

(2) विशिष्ट उद्योग अथवा व्यवसाय से संबंधित सूचकांक : इन सूचकांकों की सहायता से किसी विशिष्ट उद्योग या व्यवसाय, जैसे-चीनी उद्योग, जूट उद्योग, सीमेंट उद्योग, लोहा एवं

इस्पात उद्योग, परिवहन व्यवसाय इत्यादि में होने वाली परिवर्तनों का मापन किया जाता है । चूँकि किसी उद्योग-विशेष में प्रवृत्तियों से भिन्न हो सकती है । अत: प्रत्येक उद्योग व व्यवसाय के लिए अलग निर्देशांक बनाए जाते है । ये सूचकांक सामान्य व्यावसायिक क्रिया सूचकांक के अनुरूपक होते है ।

(3) व्यक्तिगत व्यावसायिक फर्म के सूचकांक : इन सूचकांकों से किसी व्यवसाय, फर्म अथवा उद्योग के किसी क्षेत्र की एक व्यक्तिगत या विशिष्ट संस्था में होने वाले उच्चावचनों की जानकारी मिलती है ।

व्यवसाय-मापक यंत्रों के प्रयोग से व्यवसाय की भावी प्रगति का पूर्वानुमान लगाया जाता है । इससे व्यवसायियों को विभिन्न प्रकार के प्रबंधकीय निर्णय लेने में सहायता मिलती है । इनसे पूँजी-विनियोग, विकास एवं विस्तार, आधुनिकीकरण, बाजार-विकास इत्यादि अनेक समस्याओ का आसानी से समाधान किया जा सकता है । इस प्रकार व्यवसाय-माप यंत्र व्यवसाय में बहुत उपयोगी सिद्ध होते हैं लेकिन उपर्युक्त गुणों के बावजूद इनकी कुछ सीमाएँ भी है । यदि केवल व्यवसाय मापक यंत्रों के आधार पर ही व्यावसायिक पूर्वानुमान किये जाएँ तो परिणाम गलत हो सकते है क्योंकि ये केवल भूतकालीन प्रवृत्तियों के द्योतक होते है । अत: पूर्वानुमान करते समय वर्तमान परिरिथतियो का भी ध्यान रखा जाना चाहिए । प्राय: सूचकांकों के निर्माण में अपर्याप्त एवं अशुद्ध समंकों का प्रयोग किया जाता है,अत: बहुधा व्यवसाय-मापक यंत्र, अशुद्ध एवं भ्रामक होते है । इसके अलावा, उद्योग विशेष में होने दाल सामयिक परिवर्तन, सामान्य व्यवसाय सूचकांक द्वारा व्यक्त परिवर्तनों से सर्वथा अलग हो सकते है ।

(ii) बाह्यगणन : यदि दी हुई अवधि में समंकों में कोई तीव्र या आकस्तिमक वृद्धि या कमी नहीं हुई तो तथा उच्चावनों में नियमितता हो तो बाह्यगणन विधि द्वारा पूर्वानुमान अच्छे होते है । आधुनिक व्यावसायिक युग में विभिन्न अनुमानों के लिए इस तकनीक का उपयोग किया जाता है । उदाहरणार्थ विभिन्न मूल्यों पर अनुमानित माँग का अनुमान लगाना, ज्ञात सामग्री के आधार पर माँग तथा उत्पादन में होने वाले भारी परिवर्तनों का अनुमान लगाना तथा समंकों के अभाव या अपर्याप्तता की पूर्ति हेतु आन्तरगणन क्रिया का भी उपयोग करना ।

इस विधि के अन्तर्गत सर्वप्रथम यह ज्ञान किया जाता है कि प्रस्तुत श्रेणी में किस प्रकार का उपनति वक्र उपयुक्त है। तत्पश्चात् उसी प्रवृति के उपनति वक्र का भविष्य के लिए तत्सम्बन्धी गणितीय निर्देश पर प्रक्षेपण कर दिय जाता है। व्यावसायिक पूर्वानुमान में प्रयुक्त विभिन्न उपनति वक्र निम्न प्रकार है ।

(क) अंकगणितीय उपनति : अंकगणितीय उपनति सरल रेखा इस मान्यता पर आधारित है कि समय की प्रत्येक इकाई पर आश्रित चर मूल्य एक समान या स्थिर राशि से घटता-बढ़ता है । इसका समीकरण Y = a + bX है जो निम्न प्रकार से हल किया जा सकता है -

$$\sum Y = Na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

(ख) अर्द्ध-लघुगणकीय उपनति - अर्द्ध-लघु-गणकीय उपनति में समय की प्रत्येक इकाई पर मूल्यों में सत प्रतिशत से परिवर्तन प्रदर्शित किया जाता है । Y- अक्ष पर लघुगणकीय मापदण्ड

लेकर उपनति का बिन्दु रेखीय चित्रण किया जाता है । स्थिर प्रतिशत रमे वृद्धि होने पर अर्द्ध-लघुगणकीय उपनति एक सरल रेखा के रूप में होगी ।

(ग) संशोधित धातांकीय उपनति - इसके अन्तर्गत समय की एक इकाई से सम्बद्ध आश्रित चर मूल्यों में प्रत्येक वृद्धि पिछले मूल्यों के एक स्थिर प्रतिशत (100 से कम) के रूप में होती है । यह $Y = a + bx$ समीकरण पर आधारित है।

(घ) पर्ल-रीड वक्र अथवा वृद्धिघातीय उपनति - पर्ल-रीड वक्र एक S आकार वाला वक्र होता है जो उन उद्योगों की प्रगति प्रदर्शित करने में उपयुक्त होता है जिनकी प्रारम्भिक विकास गति बहुत धीमी होती फिर तेजी से बढती हुई परिपक्वता के स्तर पर पहुँच जाती है, जिसके बाद फिर उसकी गति धीमी हो जाती है ।

(ङ) गोम्पर्टन वक्र : गोम्पर्टज् वक्र निम्न समीकरण पर आधारित है :

$$Yc = ab^{cx}$$

लघुगणकीय रूप में.

$$Log\ Yc = log\ a + (log\ b)^{cx}$$

बाह्यगण विधि की शुऋता मुख्यतः समको के सम्भाव्य उच्चावचनों और तत्सम्बन्धी घटनाओं के समुचित ज्ञान पर निर्भर होती है । यद्यपि व्यावसायिक पूर्वानुमान की यह विधि सरल है किन्तु इसका प्रयोग उन परिस्थितियों तक ही सीमित होता है, जहाँ इसकी मान्यताएँ पूरी हों । इस विधि मं कौन से उपनति वक्र का प्रयोग किया जाये, इसका चयन भी एक कठिन कार्य है ।

(ii) काल श्रेणी विश्लेषण : व्यावसायिक पूर्वानुमान में काल श्रेणी विश्लेषण का प्रयोग उस समय किया जाता है तब विगत अनेक वर्षो के व्यवसाय-समंक उपलब्ध हों और उनमें सुनिश्चित प्रवृत्ति उपनति (Secular Trend), मौसमी विचरण (Seasonal Fluctuations) और चक्रीय उच्चावचनों (Cyclical Variations) का विश्लेषण एवं पृथक्करण किया जाता है।

काल श्रेणी विश्लेषण का आधार योगात्मक या गुणात्मक निर्देश होता है । काल श्रेणी विश्लेषण में उपनति निर्धारण के लिए अनेक रीतियों का वर्णन है, जिनमें से उपयुक्त रीति का चयन करके उपनति का निर्धारिण कर लिया जाता है, फिर मौसमी विचरण का मापन करके संशोधित श्रेणी का भविष्य के लिए पूर्वानुमान कर दिया जाता है ।

(iii) **सह-सम्बन्ध तथा प्रतीपगमन विशेषण** : प्रतीपगमन की विधि सह-सम्बन्ध पर आधारित है । प्रतीपगमन के आधार पर सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न तथ्यों के मध्य सम्बन्धों का विश्लेषण करके एक पद मूल्य से सम्बन्धित दूसरी (आश्रित) श्रेणी के मूल्य का अनुमान किया जा सकता है । व्यावसायिक जगत् में जिसके द्वारा एक "नियन्त्रण उपकरण" की भाँति कार्य करता है जिसके द्वारा पूर्वानुमान, निर्णय लेना तथा लिये गये निर्णयों को व्यावहारिक रूप देना सम्भव हो जाता है ।

इस विधि में अनुमान द्विचर श्रेणियों में दो प्रतीपगमन समीकरणों (Regression Equations) की सहायता से ज्ञान किये जाते है । समीकरण निम्न प्रकार से है :

$$X_c = a + bY$$

or $X-\overline{X}=bxy\left(Y-\overline{Y}\right)$

or $X-\overline{X}=\frac{r\times\sigma x}{\sigma y}\left(Y-\overline{Y}\right)$

bxy का मूल्य निम्न सूत्र से भी ज्ञात किया जाता है.

$$bxy=\frac{N\times\sum XY-\left(\sum X\times\sum Y\right)}{\sum Y^2\times N-\left(\sum Y\right)^2}$$

(ब) **Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण** : इस समीकरण का प्रयोग X स्वतन्त्र चर के मूल्यों में ज्ञात परिवर्तनों के लिए आश्रित चर Y के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों के अध्ययन के लिए किया जाता है । इसका सूत्र निम्न है :

Yc = a + bX

or $Y-\overline{Y}=bxy\left(X-\overline{X}\right)$

or $Y-\overline{Y}=\frac{r\times\sigma y}{\sigma y}\left(X-\overline{X}\right)$

byx का मूल्य निम्न सूत्र से भी ज्ञात किया जाता है:

$$byx=\frac{\sum XY.N-\left(\sum X\times\sum Y\right)}{\sum X^2\times N-\left(\sum X\right)^2}$$

प्रतीपगमन विश्लेषण की सहायता से मूल्य का माँग पर प्रभाव आयु का भार पर प्रभाव तथा वर्षा का उपज पर प्रभाव आदि ज्ञान किये जाते है इसलिए भविष्य हेतु व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाये जाते हैं । जब दो या दो से अधिक चर मूल्यों के सम्बन्ध का विश्लेषण ज्ञात किया जाता है तो भी बहु गुणी प्रतीपगमन विधि द्वारा ज्ञात करके, भविष्य के लिए पूर्वानुमान लगाये जाते है ।

Illustration1: निम्न समंकों की सहायता से यह ज्ञान कीजिये कि यदि चेन्नई में किसी वस्तु की माँग 50 है तो जयपुर में उसकी सम्भावित माँग क्या होगी?

चेन्नई की औसत माँग($\overline{X}$) = 60; चेन्नई का प्रमाप विचलन (σx) = 3

जयपुर की औसत माँग($\overline{Y}$) = 62; जयपुर का प्रमाप विचलन (σy) = 2.5

सह-सम्बन्ध गुणांक (r) = .6

Solution: Regression Equation Y on X

$$\left(Y-\overline{Y}\right)=r\frac{\sigma y}{\sigma x}\left(X-\overline{X}\right)$$

$$\left(Y-62\right)=0.6\times\frac{2.5}{3}\left(x-60\right)$$

$$Y-62=0.5\left(X-60\right)$$

$$Y-62=0.5X-30$$

$$Y=0.5X-30+62$$

$$Y=0.5X+32$$

अब X = 50 होने पर Y का मान है :

$$Y=0.5X+32$$

$$Y=0.5\times50+32$$

$$=2.5+32=57 \text{ Ans.}$$

यदि चेन्नई में वस्तु की माँग 50 है तो जयपुर में उसकी माँग 57 है ।

Illustration 2: निम्न समंक 1,000 व्यावसायिक अधिकारियों की लम्बाई (X) तथा भार (Y) से सम्बन्धित

है :

Mean Height = 68"　　　S.D. (Height) = 2.5"

Mean Weight = 150 lbs　　S.D.(Weight) = 20 lbs

r = 0.6

उपर्युक्त समंकों से (अ) उस अधिकारी की लम्बाई शान कीजिए जिसका भार 200 पौंड है, तथा (ब) उस अधिकारी का भार अनुमानित कीजिए जिसकी लम्बाई 5 फीट है ।

Solution :

- -Regression Equation of X on Y

$$X-\overline{X}=r\frac{\sigma x}{\sigma y}\left(Y-\overline{Y}\right)$$

$$X-68=0.6\times\frac{2.5}{20}\left(Y-150\right)$$

$$X-68=.075Y-11.25$$

$$X=.0745Y+56.75$$

यदि Y (भार) = 200 पौंड हो तो X लम्बाई निम्न प्रकार होगी :

$$X=.075\left(200\right)+56.75$$

$$=71.75''$$

अत: 200 पौंड भार वाले अधिकारी की लम्बाई 71.75 इंच होगी । Ans.

Regression Equation of Y on X

$$Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma x}{\sigma y}\left(X-\overline{X}\right)$$

$$Y-150=0.6\times\frac{20}{2.5}\left(X-68\right)$$

$$X-68=.075Y-11.25$$

$$Y=4.8X-176.4$$

यदि X (लम्बाई) = 60 इंच हो तो Y भार :

$$Y=4.8\left(60\right)-176.4$$

$$=111.6lbs$$

अत: 60 इंच लम्बाई वाले अधिकारी का भार 111.6 पौंड होगा । Ans.

(v) आगत-निर्गत विश्लेषण: आगत-निर्गत विश्लेषण उद्योगों के अन्त: सम्बन्धों (Inter Industry relation) की तकनीक है जिसमें व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाये जाने में सहायता मिलती है, इस तकनी का पूर्वानुमान में निम्न योगदान है

(अ) निश्चित निर्गत (Output) के लिए लगने वाले आगत (Input) का पूर्वानुमान लगाना ।

(ब) अंतिम माँग को पूरा करने के लिए निर्गत (Output) का पूर्वानुमान लगाना ।

(स) निश्चित निर्गत (Output) पर विक्रय राशि तथा उत्पादन लागतों का पूर्वानुमान लगाना ।

परन्तु इस नीति में समय व श्रम अधिक लगता है और गुणकों की स्थिरता की मान्यता अवास्तविक है तथा इस विश्लेषण के अन्तर्गत कोई ऐसा तंत्र (Mechanism) नही है जिसके कारण मूल्य के समायोजन को भी विशेष स्थान मिल सके। अत: यह नीति अधिक प्रभावशाली नहीं है ।

(vi) अभिमत या मत सर्वेक्षण: इस विधि के अन्तर्गत सम्बन्धित क्षेत्र के विशेषज्ञों की महत्वपूर्ण राय शुमारी ली जाती है फिर उनका विश्लेषण करके भावी पूर्वानुमान लगाये जाते है, जैसे-L.G. टेलीविजन की माँग का पूर्वानुमान लगाने के लिए विक्रेताआ थोक व फुटकर व्यापारियों, विपणन, विशेषज्ञों और उपभोक्ताओं की राय का सर्वेक्षण किया जा सकता है । लेकिन इस विधि का सबसे बड़ा दोष यही है कि विशेषज्ञों एवं अन्यों की राय भिन्न-भिन्न एवं पक्षपातपूर्ण भी हो सकती है इसलिए इसे सर्वाधिक सन्तोषप्रद नहीं कहा जा सकता ।

लेकिन इस विधि का उपयोग अधिकांश पत्र-पत्रिकाओं, टी.वी. चैनल में चुनाव विश्लेषण हेतु किया जाता है जैसे भारत में "आज तक टी.वी. चैनल" चुनाव से पूर्व विश्लेषण करके यह पूर्वानुमान लगा कर दिखाते है किस पार्टी के सत्ता में आने की संभावना है । अमेरिका में 'Fortune' पत्रिका, दी ब्रुकमान फोरकास्टर, मूडी इन्वेस्टमेंट, भारत में 'India Today, Economic Times, Financial Express' आदि पत्र-पत्रिकायें अनेक आर्थिक व वाणिज्यिक विषयों पर पूर्वानुमान इसी विधि के आधार पर लगाते है ।

(vii) आधुनिक अर्थमितिय विधि : यह विधि विशेष रूप से द्वितीय विश्व युद्ध के बाद प्रचलित हुई । अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों से सम्बन्धित चर मूल्यों (Variables) पर आधारित अनेक द्विपद समीकरणों (Simultaneous Equation) की सहायता से अर्थव्यवस्था का विकास प्रतिमान (Growth model) बनाया जाता है । इसमें व्यवसाय की भावी गतिविधियों का प्रक्षेपण (Projection) कर लिया जाता है । यह विधि काफी जटिल है, इसकी सफलता शुद्ध समंकों की पर्याप्तता, विशेषज्ञों की उपलब्धता पर निर्भर करती है । हालांकि गणन क्रिया को सरल बनाने के लिए आधुनिक कम्प्यूटरों (Computers) का प्रयोग किया जाता है । यह रीति भारत में अधिक लोकप्रिय नहीं है ।

(viii) कारण-सूचियन विधि : कारण-सूचियन विधि विवरणात्मक विश्लेषण (Descriptive Analysis) द्वारा व्यापारिक दशाओं का पूर्वानुमान लगाती है । इस विधि के अन्तर्गत आर्थिक दशाओं की भावी गतिविधियों पर प्रभाव डालने वाले सभी कारणों का पता

लगाया जाता है फिर इसके बाद अलग-अलग कारणों के प्रभावों का विश्लेषण किया जाता है, तत्पश्चात् यह देखा जाता है कि कौनसे कारण प्रतिकूल हैं और कौनसे अनुकूल । इन सभी तथ्यों को ध्यान में रखकर व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाये जाते है लेकिन इसमें निरन्तर संशोधन और संवर्द्धन भी साथ में चलता रहता है ।

उपयुक्त विधि : उपर्युक्त वर्णित व्यावसायिक पूर्वानुमान की विधियों में से किस विधि का चयन किया जाए? इसके बारे में उत्तर देना मुश्किल है । उपयुक्त विधि का चुनाव निम्न तत्वों पर निर्भर करता है पूर्वानुमान का उद्देश्य क्या है, उनकी अवधि, समंकों की उपलब्धि, समय एवं धन की उपलब्धता, आधुनिक कम्प्यूटर की सुविधा आदि प्रत्येक विधि की अपनी अलग-अलग मान्यताएँ एवं उपयोगिता होती है अत: उपयुक्त परिस्थितियों में ही किसी विधि का चुनाव करना होगा ।

10.3 पूर्वानुमान की उपयुक्त तकनीक का चुनाव

व्यावसायिक पूर्वानुमान के लिये कोई एक तकनीक न होकर अनेक तकनीकें होती है । इनमें से कौन-सी तकनीक अधिक उपयुक्त है इसका चुनाव निम्न तत्वों के आधार पर किया जाना चाहिए :

(i) उपलब्ध साधन एवं समय

(ii) संस्था के लिए पूर्वानुमान का महत्व,

(iii) पूर्वानुमान का उद्देश्य

(iv) पूर्वानुमान की अवधि-दीर्घकालीन अथवा अल्पकालीन,

(v) व्यवसाय सम्बन्धी समंकों की पर्याप्त उपलब्धता,

(vi) परिशुद्धता की अभीष्ट मात्रा

(vii) विद्युत-संगणक सम्बन्धी सुविधाओं की उपलब्धि आदि ।

(viii) उत्पादन प्रक्रिया के चरण, तथा

(ix) व्यवसाय की प्रकृति एवं आकार

उपरोक्त तत्वों को ध्यान में रखकर ही व्यावसायिक पूर्वानुमान हेतु किसी एक या एक से अधिक तकनीकों का चुनाव किया जाना चाहिए । ताकि पूर्वानुमान भावी जोखिमों को कम करने में उपयोगी हो सके ।

10.4 व्यावसायिक पूर्वानुमान के प्रमुख चरण

1. व्यावसायिक पूर्वानुमान का क्षेत्र निर्धारित करना-सम्पूर्ण राष्ट्र, विशेष क्षेत्र, विशेष उद्योग अथवा विशिष्ट फर्म आदि।
2. व्यावसायिक पूर्वानुमान की अवधि का निर्धारण - दीर्घकालीन या अल्पकालीन,
3. व्यावसायिक पूर्वानुमान के उद्देश्य स्पष्ट रूप से निर्धारित करना,
4. व्यावसायिक कार्य के परिभाषित करना,
5. व्यावसायिक दशाओं का यथोचित अध्ययन-पूर्ण प्रतियोगिता, अपूर्ण प्रतियोगिता, एकाधिकार, आदि ।

6. पूर्वानुमान के लिए आवश्यक, पर्याप्त एवं विश्वसनीय तथ्यों और समंकों का संकलन करना ।
7. व्यावसायिक पूर्वानुमान के निर्धारक तत्वों को ज्ञात करना तथा उनका पारस्परिक सम्बन्ध निश्चित करना,
8. व्यावसायिक पूर्वानुमान के सिद्धान्तों की पूर्ण जानकारी करना,
9. व्यावसायिक पूर्वानुमान का निर्धारण करना ।
10. चयन की गई विधि के अनुसार तथ्यों एवं सूचनाओं का विश्लेषण, निर्वचन एवं निष्कर्ष प्राप्त करना, तथा,
11. व्यावसायिक पूर्वानुमान की विभिन्न विधियों का अध्ययन एवं उपयुक्त विधि का चुनाव करना ।

व्यावसायिक पूर्वानुमान से सही एवं शुद्ध निष्कर्ष प्राप्त करने तथा भावी जोखिम को कम कर अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु एक सफल व्यवसायी के लिए यह आवश्यक है कि वह व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रक्रिया को उपरोक्त क्रम में ही पूरा करते हुए किसी ऐसे निर्णय पर पहुँचे, जो कि व्यवसाय के लिए दीर्घकाल तक लाभप्रद सिद्ध हो सके । ये चरण ही व्यावसायिक पूर्वानुमान के मार्गदर्शक है ।

10.5 व्यावसायिक पूर्वानुमान के आवश्यक गुण

व्यावसायिक पूर्वानुमान का आर्थिक एवं व्यवसाय के क्षेत्र में विशेष महत्व होता है जिसके आधार पर ही एक व्यवसायी अपनी भावी नीति का निर्धारण करता है । अत: व्यावसायिक पूर्वानुमान में एक अच्छे पूर्वानुमान के लिए आवश्यक गुणों का समावेश होना चाहिए । एक अच्छे व्यावसायिक पूर्वानुमान में निम्न गुणों का होना आवश्यक है :

1. शुद्ध एवं पर्याप्त मात्रा में तथ्यों एवं समंकों के विश्लेषण पर आधारित,
2. सांख्यिकीय विधियों का यथोचित प्रयोग,
3. वैज्ञानिक पद्धति पर आधारित,
4. भूतकालीन एवं वर्तमान परिस्थितियों के विश्लेषण पर आधारित
5. दीर्घकालीन सुस्पष्ट उद्देश्यों पर आधारित
6. व्यक्तिगत पक्षपात से रहित
7. मितव्ययितापूर्ण,
8. सरल एवं स्पष्ट विधि,
9. पर्याप्त शुद्धता एवं विश्वसनीयता ।
10. पर्याप्त लोचशीलता
11. पर्याप्त लोचशीलता ।

एक व्यावसायिक पूर्वानुमान को तभी अच्छा कहा जाता है कि जबकि उसमें उपरोक्त सभी गुण विद्यमान हों । व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाते समय व्यवसायी पूर्वानुमान कार्य को विभिन्न चरणों में इस प्रकार से पूरा करे कि उसमें एक अच्छे पूर्वानुमान के सभी गुण विद्यमान हों और वह व्यवसाय के लिए मापकयन्त्र के रूप में पथ-प्रदर्शन का कार्य करें ।

10.6 बजट एवं पूर्वानुमान में अन्तर

बजट एवं पूर्वानुमान में निम्नलिखित प्रमुख अन्तर है :

अन्तर का आधार	बजट	पूर्वानुमान
1. उद्देश्य	बजट प्रबन्ध के उद्देश्य प्राप्ति का एक साधन है ।	जबकि बजट बनाने लिए प्रबन्ध का एक यन्त्र है
2. प्रक्रिया	बजट एक व्यावसायिक प्रक्रिया है।	जबकि पूर्वानुमान प्रबन्धकों हेतु एक मानसिक प्रक्रिया है ।
3. अवधि	बजट का निर्माण एक भावी निश्चित अवधि के लिए है ।	जबकि पूर्वानुमान भूतकालीन, वर्तमान तथा भविष्य तीनों अवधियों के लिए होता है ।
4. आधारित	बजट पूर्वानुमान पर आधारित होता है ।	जबकि पूर्वानुमान किसी भी आधारित नहीं होता है।
5. लक्ष्य प्राप्ति	बजट का निर्माण उत्पादन लक्ष्य को प्राप्त करने हेतु किया जाता है ।	जबकि पूर्वानुमान बजट बनाने हेतु आवश्यक होता है ।
6. सफलता	बजट की सफलता सुदृढ़ पूर्वानुमान पर आधारित है ।	जबकि पूर्वानुमान की सफलता सांख्यिकीय तथा वैज्ञानिक विधियों पर आधारित है ।
7. परिमाणात्मक	बजट परिमाणात्मक पर आधारित है ।	जबकि पूर्वानुमान परिमाणात्कता पर आधारित नहीं है बल्कि गुणात्मकता पर आधारित है।
8. प्रमाप निर्धारण	बजट का एक प्रकार के प्रमाप पर आधारित है ।	जबकि पूर्वानुमान प्रमाप के रूप में बजट निर्धारण पर आधारित है ।
9. चित्रण	बजट समस्त व्यवसाय को चित्रित करता है ।	पूर्वानुमान बजट को चित्रित करने में सहायक होते है ।

10.7 व्यावसायिक पूर्वानुमान का महत्व

व्यावसायिक पूर्वानुमान व्यापार चक्रों के बुरे परिणामों को रोकने, आर्थिक मंदी के बारे मे पूर्वाभ्यास कराने, भावी अनुमानित माँग बतलाने में अत्यधिक भूमिका निभाता है । व्यवसायी पूर्वानुमान की सहायता से ही अपने व्यापार, उद्योग की नति निर्धारित करता है तथा भावी योजनाएँ बनाता है, यही नहीं आने वाले खतरों की पूर्व चेतावनी मिल जाने पर व्यवसायी उसको दूर करने के उपायों से अपने आपको पूरी तरह तैयार कर सकता है । व्यावसायिक पूर्वानुमान का लाभ केवल व्यवसायी को ही होता है, ऐसी बात नहीं है, ये समाज के सभी वर्ग, जैसे-व्यापारी, उद्योगपति, प्रशासक, प्रबन्धक, उपभोक्ता, सरकार तथा राजनीतिज्ञ आदि सभी को लाभान्वित करता है । इसके लाभ निम्नलिखित है :

1. व्यवसायी के लिए उपयोगी : एक व्यवसायी अपनी वस्तु की भावी माँग, उनका सम्भावित मूल्य, उपभोक्ताओं की क्रक शक्ति, कच्चे माल की भावी स्थिति, साख नीति, सरकारी नीति, आयात-निर्यात स्थिति, जनता की रूचि, फैशन आदि तथ्यों का पूर्वानुमान लगाकर अपने व्यापार की नीति का निर्धारण तदनुरूप करके अधिकतक लाभ कमा सकता है ।

2. समाज के लिए उपयोगी : व्यावसायिक पूर्वानुमानों के माध्यम से व्यापार चक्रों को नियमित करने पर सम्पूर्ण समाज को इसका लाभ पहुँचता है, वैसे समाज में उत्पादक, कृषक, व्यापारी, उपभोक्ता, श्रमिक कर्मचारी आदि सभी को सम्मिलित किया जाता है ।

3. व्यापार चक्रों को नियंत्रित करने में : व्यावसायिक पूर्वानुमान व्यापार चक्रों को नियंत्रित करने में बहुत उपयोगी है। व्यापार चक्रों के बुरे परिणामों को रोकन में व्यावसायिक पूर्वानुमान का बहुत महत्व है । व्यावसायिक चक्रों से व्यवसाय की जोखिम बढ़ जाती है, सट्टे को प्रोत्साहन मिलता है, पूँजी निर्माण में शिथिलता आ जाती है, तथा बेरोजगारी फैलती है । इसलिए सरकार और व्यवसायी वर्ग दोनों मिलकर योजनाबद्ध तरीके से व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीकें अपनाकर इनको नियंत्रित करने का प्रयास करते है, ताकि इनकी भीषणता को कम किया जा सके।

4. अनार्थिक क्रियाओं पर रोक : सट्टे जैसी प्रवृत्तियों को रोकने, चोर बेरोजगारी आदि को रोकन में व्यावसायिक पूर्वानुमान सहायक सिद्ध होते हैं ।

5. आर्थिक मंदी की चेतावनी : मंदी की लहर एक देश से दूसरे देश में फैलकर पूरे संसार के आर्थिक ढाँचे को ही अस्त-व्यस्त कर देती है । जैसा कि बीसवीं शताब्दी के नवें दशक के उत्तरार्द्ध में समस्त दक्षिण-पूर्व एशिया आर्थिक मन्दी और कठिनाइयों के दौर से गुजरा था, भारत भी इस आर्थिक मन्दी से प्रभावित हुआ । यदि आने वाली आर्थिक मन्दी के बारे में पूर्वाभास हुआ होता तो आर्थिक मन्दी के दुष्परिणामो का प्रभावशाली ढंग से मुकाबला करने के उपाय ढूँढे जा सकते थे।

6. सरकार के लिए सहायक : अर्थव्यवस्था में उत्पन्न होने वाले किसी भी प्रकार के असंतुलनों का पूर्वाभास, सरकार को इन व्यावसायिक पूर्वानुमानों से ज्ञात हो सकता है । आने वाले खतरे की पूर्व चेतावनी मिल जाने पर सरकार एवं व्यापारी दोनों मिलकर उसको दूर करने के उपायों से अपने आपको पूरी तरह से तैयार कर सकते है ताकि जनता में असंतोष कम फैले और सरकार पर अनावश्यक आक्षेप न लगे ।

7. व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाने के क्षेत्र में कई शोध समितियों का आगमन : आर्थिक शोध समितियाँ सांख्यिकीय संगठन, अर्थमितीय संस्थान, जैसे-अमेरिका के ब्रुकमायर आर्थिक सेवा संगठन (पूर्वानुमान विशेषज्ञ) हार्वर्ड आर्थिक सोसायटी (विभिन्न प्रकार की आर्थिक सूचकांक विशेषज्ञ) आदि प्रमुख संस्थाएँ देश-विदेश में अपनी सेवायें देने का कार्य एक प्रोफेशन के रूप में कर रही है, जहाँ विभिन्न प्रकार के विशेषज्ञों, विश्लेषकों की मदद से वैज्ञानिक तकनीकों से व्यावसायिक पूर्वानुमान कार्य को अन्जाम दिया जाता है जो व्यवसाय, उद्योग को अपनी भावी नतियों का निर्धारण करने में सहायता करती है।

8. सर्वोत्तम विकल्प का चुनाव - संगठन या संस्था में समय-समय पर क्रय-विक्रय, उत्पादन, श्रम एवं वित्त आदि मामलों के बारे में निर्णय लेने पड़ते ह । प्रबन्धकों अथवा संगठनकर्त्ता के समक्ष कई विकल्प होते हैं, जिसमें से सर्वोत्तम विकल्प का चुनाव करना होता है । जिसके आधार पर नीतियों का निर्धारण किया जाता है । इस प्रकार व्यावसायिक पूर्वानुमान के माध्यम से समस्त विकल्पों के प्रभावों का विश्लेषण करके सर्वोत्तम विकल्प का चुनाव किया जाता है ।

10.8 व्यावसायिक पूर्वानुमान की सीमाएँ या कमियाँ

व्यावसायिक पूर्वानुमान को सभी समस्याओं की अचूक दवा मान लेना, व्यावसायिक, सफलता की एकमात्र कुँजी मान लेना यह भारी भूल होगी । वास्तव में इस विधि की अपनी कुछ सीमाएँ या कमियाँ भी है जिन्हें पूर्वानुमान करते समय अवश्य ध्यान में रखना चाहिए तथा आवश्यकतानुसार अति प्रावधान करना चाहिए । व्यावसायिक पूर्वानुमान की प्रमुख सीमाएँ निम्नलिखित है.

1. व्यावसायिक पूर्वानुमान एक पूर्ण एवं यथार्थ विज्ञान नहीं : क्लैरेन्स जड का कहना है कि "किसी भी पूर्वानुमान में एकमात्र सत्य यह अवश्य होता है कि उसमें कोई न कोई अशुद्धि अवश्य होगी । " स्पष्ट है कि भावी पूर्वानुमान सदैव नहीं तो अधिकांशतः अनिश्चितता से परितपूर्ण होते है और वे पूरी तरह से सत्य नहीं होते । व्यासवसायिक पूर्वानुमान अल्प समय के लिए ही सही उत्तर दे सकते है । जैसे दूसरे विद्वान **मोरोने** ने कहा "इग्लैण्ड में मौसम पूर्वानुमान की भाँति आर्थिक पूर्वानुमान केवल आगामी लगभग छः घण्टों के लिए ही सत्य होता है, इसके आगे वह कोरा अनुमान है। "

2. व्यावसायिक परिवर्तनों की गति सदैव नियमित नहीं : आर्थिक घटनाओं की पुनरावृत्ति होती है लेकिन प्रत्येक समय में कुछ नवीन विशेष परिस्थितियाँ प्रकट होती है । जिससे भावी पूर्वानुमानों को अनिश्चित बना देती है ।

3. व्यावसायिक पूर्वानुमान कथन मात्र है : भावी अनिश्चितता के कारण व्यावसायिक पूर्वानुमान सत्य हो भी सकते है और नहीं भी । इसलिए पूर्वानुमान भावी प्रवृत्तियों के केवल संकेत मात्र है इससे अधिक कुछ नहीं ।

4. पूर्वानुमान जिन मान्याताओ के आधार पर किये जाते है वे मान्यताएँ सदैव पूरी नहीं होती ।

5. व्यावसायिक पूर्वानुमान करने वाला व्यक्ति अनुभवी एवं निष्पक्ष न होने के साथ सांख्यिकीय रीतियों से पूर्णतया परिचित भी न हो तो पूर्वानुमान भ्रमात्मक एवं बकवास सिद्ध होंगे।

6. प्रत्येक काल में नवीन विशेष परिस्थितियाँ प्रकट हो जाती है जो भावी पूर्वानुमानों को निष्फ़ल एवं अनिश्चित बना देती है ।

7. पूर्वानुमान में व्यक्तिगत पक्षपात की सम्भावना होती है ।

8. व्यावसायिक पूर्वानुमान हेतु पर्याप्त एवं आवश्यक मात्रा में तथ्य उपलब्ध नहीं होते है ।

9. व्यावसायिक पूर्वानुमान के लिए साधनों की सीमितता होती है ।

10.9 विविध उदाहरण

Illustration 3: निम्न चरों से X On Y और Y on X प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए । X on Y मध्य प्रतीपगमन गुणांक और सहसम्बन्ध गुणांक भी ज्ञात कीजिए:

X	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
Y	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

Solution: Calculation of Coefficient of Correlation and Regression

Value	$\bar{x}$ = 33 Deviation (x)	X^2	Values	$\bar{y}$ = 22 Deviation (y)	Y^2	Xy
23	-7	49	18	-7	49	+49
27	-3	9	20	-5	25	+15
28	-2	4	22	-3	9	+6
29	-2	4	27	+2	4	-4
30	0	0	29	+4	16	+4
31	+1	1	27	+2	4	+2
33	+3	9	29	+4	16	+12
35	+5	25	28	+3	9	+45
36	+6	36	29	+4	16	+24
Σx =300 N =10	Σx=0	Σx^2= 138	Σy=250	Σy=0	Σy^2= 164	Σxy= 123

Arithmetic Mean :

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{300}{10} = 30$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{250}{10} = 25$$

Regression Coefficient of X on Y or (bxy) :

$$bxy = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$$

$$= \frac{123}{164} = 0.75$$

Regression Coefficient of Y on X or (byx) :

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$$= \frac{123}{138} = 0.891$$

Coefficient of Correlation :

$$r = \sqrt{bxy, byx}$$

$\sqrt{.75 \times .891} = \sqrt{0.66825} = 0.817$ or 0.82

Regression Equation of X on Y : Regression Equation of Y on X :

$\left(x-\overline{x}\right)=bxy\left(y-y\right)$

$\left(x-30\right)=0.75\left(y-25\right)$

or $\left(x-30\right)=0.75y-18.75$

or $x=0.75y-18.75+30$

$x=0.75y+11.25$ *Ans.*

$\left(y-\overline{y}\right)=byx\left(x-\overline{x}\right)$

$\left(y-25\right)=0.891\left(x-30\right)$

or $\left(y-25\right)=0.891x-26.73$

or $y=0.891x-26.73+25$

or $y=0.891x-1.73$ *Ans.*

Illustration 4: निम्न समंकों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक और प्रतीपगमन समीकरण ज्ञान कीजिए:

Age of Husband	Age of wife	Age of Husband	Age of wife
18	17	23	19
19	17	24	19
20	18	25	20
21	18	26	21
22	18	27	21

Solution :

Calculation of Coefficient of Correlation and Regression

Age of Husband (x)	A=22 dx	dx^2	Age of wife(y)	A=18 dy	dy^2	dxdy
18	-4	16	17	-1	1	+4
19	-3	9	17	-1	1	+3
20	-2	4	18	0	0	0
21	-1	1	18	0	0	0
22	0	0	18	0	0	0
23	+1	1	19	+1	1	+1
24	+2	4	19	+1	1	+2
25	+3	9	20	+2	4	+6
26	+4	16	21	+3	9	+12
27	+5	25	21	+3	9	+15
N=10	$\Sigma dx=+5$	$\Sigma dx^2=85$		$\Sigma dy=+8$	$\Sigma dy^2=26$	$\Sigma dxdy=43$

Arithmetic Means :

$$\overline{X}=A=\frac{\sum dx}{N}$$

$$\overline{X}=22+\frac{5}{10}=22.5$$

$$\overline{Y}=A=\frac{\sum dy}{N}$$

$$\overline{Y}=18+\frac{8}{10}=18.8$$

Standard Deviations :

$$\sigma x=\frac{1}{N}\sqrt{\sum d2x.N-\left(\sum dx\right)^2}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{85\times 10-(5)^2}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{850-25}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{825}=2.87$$

$$\sigma x=\frac{1}{N}\sqrt{\sum d2y.N-\left(\sum dy\right)^2}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{26\times 10-(8)^2}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{260-64}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{196}=1.4$$

Cofficient of Correlation :

$$r=\frac{\sum dxdy.N-\left(\sum dx.\sum dy\right)}{\sqrt{\sum dx^2x.\left(\sum dx\right)^2}\sqrt{\sum dy^2.N-\left(\sum dy\right)^2}}$$
$$=\frac{43\times 10-(5)^2}{\sqrt{85\times 10-(5)^2}\sqrt{26\times 10-(8)^2}}$$
$$=\frac{430-40}{\sqrt{825\times 196}}$$
$$=\frac{390}{28.72\times 14}=\frac{390}{402.08}=0.9699 \text{ or } 0.97$$

Regression Coefficients

X on Y :

$$bxy=r\frac{\sigma x}{\sigma y}$$
$$=0.97\frac{2.87}{1.4}=1.99$$

Y on X :

$$byx=r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$
$$=0.97\frac{1.4}{2.87}=0.47$$

Regression Equations X on Y :

$$\left(x-\overline{x}\right)=bxy\left(y-\overline{y}\right)$$
$$(x-22.5)=1.99(y-18.8)$$
$$(x-22.5)=1.99y-37.41$$
$$x=1.99u-14.91$$ Ans.

Y on X

$$\left(y-\overline{y}\right)=byx\left(x-\overline{x}\right)$$
$$(y-18.8)=0.47(x-22.5)$$
$$(y-18.8)=0.47x-10.58$$
$$y=1.99u-14.91$$ Ans

10.10 सारांश

किसी भी व्यवसाय की सफलता अथवा असफलता का प्रभाव केवल व्यवसायी पर ही नहीं पड़ता बल्कि इससे देश की आर्थिक एवं सामाजिक परिस्थितियाँ भी प्रभावित होती है । अत:

व्यवसाय की सफलता हेतु उचित व्यावसायिक पूर्वानुमान लगाना परम् आवश्यक है । व्यावसायिक जगत में अनेक परिवर्तन एवं उतार-चढ़ाव आते है, जिससे की व्यवसाय की लाभार्जन क्षमता प्रभावित होती है । पूर्वानुमान की सहायता से व्यवसायी तेजी, मन्दी प्रतिसार एवं व्यवसायिक ठहराव आदि के बारे में पहले से जानकारी प्राप्त कर सकता है । अत: व्यावसायिक पूर्वानुमान की तकनीकी ने व्यावसायिक सफलता के द्वारा खोल दिए है ।

10.11 शब्दावली

व्यवसायमापक यन्त्र : व्यावसायिक क्रियाओं के अध्ययन तथा विश्लेषण के लिए व्यवसाय सूचकांकों की रचना की जाती है, जो व्यवसाय की भावी प्रवृत्तियों के संकेतांक होते है ।

बाह्यगणन : बाह्यगणन का अर्थ है दी गई श्रेणी में किसी उपनति वक्र का भविष्य के लिए तत्सम्बन्धी गणितीय निदर्श के आधार पर प्रक्षेपण कर देना ।

10.12 स्वपरख प्रश्न

1. व्यावसायिक पूर्वानुमान की विभिन्न तकनीको का वर्णन कीजिए ।
2. सह-सम्बन्ध विश्लेषण से पूर्वानुमान कैसे किए जाते है ।
3. व्यावसायिक पूर्वानुमान के आवश्यक तत्वों का विवेचन कीजिए ।
4. पूर्वानुमान की उपयुक्त तकनीक का चयन कैसे किया जाता है ।
5. व्यावसायिक पूर्वानुमान की सीमाओं का वर्णन कीजिए ।
6. व्यावसायिक पूर्वानुमान के प्रमुख चरणों का वर्णन कीजिए ।
7. व्यावसायिक पूर्वानुमान के लाभों का वर्णन कीजिए ।
8. व्यावसायिक पूर्वानुमान तथा बजट में अन्तर स्पष्ट कीजिए ।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. परियोजना नियोजन एवं बजटरी नियंत्रण अग्रवाल, सारस्वत, मिश्रा । रमेश बुक डिपो, जयपुर।
2. व्यावसायिक बजटन-अग्रवाल, विजय, सुरोलिया । रमेश बुक डिपो, जयपुर ।
3. व्यावसायिक सांख्यकी - ओसवाल, अग्रवाल, भार्गव, तिवाड़ी, मीणा । रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

इकाई- 11

काल श्रेणी का अर्थ एवं परिभाषा

इकाई की रूप रेखा

11.0 उद्देश्य

11.1 प्रस्तावना

11.2 काल श्रेणी का अर्थ

11.3 काल श्रेणी की परिभाषा

11.4 काल श्रेणी का महत्व

11.5 काल श्रेणी के संघटक एवं विचरण का कारण

11.6 सारांश

11.7 शब्दावली

11.8 स्व -परख प्रश्न

11.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्यहो सकेगे कि :-

- काल श्रेणी का अर्थ एवं परिभाषा को समझ सकें ।
- काल श्रेणी के महत्व का ज्ञान हो ।
- काल श्रेणी के विभिन्न संघटक को समझ सकें या प्रवृति का मालूम हों ।
- काल श्रेणी मे होने वाले विभिन्न परिवर्तनों के कारण का ज्ञान हो सके ।

11.1 प्रस्तावना

सांख्यिकीय विधियों मे काल श्रेणी भी विशेष स्थान रखती है एवम् आर्थिक समस्याओं को सुलझाने मे सहायक है । काल श्रेणियाँ काल या समय पर आधारित होती है । समय एवम् काल में गति होती है । एवम् गति प्रकृति के साथ साथ आर्थिक एवम् व्यवसायिक क्षेत्रों में भी महत्वपूर्ण परिवर्तन करती है । समय के साथ विभिन्न क्षेत्र प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से प्रभावित होते है जैसे जनसंख्या, राष्ट्रीय आय, बिकी, उपभोग आदि । इन परिवर्तनों का अध्ययन प्रतिद्वन्द्वात्मक युग में सफलता के लिए आवश्यक व उपयोगी है । इन परिवर्तनो का अध्ययन प्रशासन, व्यवसायी उपभोक्ता सरकार, अर्थशास्त्री आदि के लिए जरूरी है । ये सभी इन काल श्रेणियों का उपयोग अल्पकालीन एवम् दीर्घकालीन नीतियाँ बनाने में लेते है । इन नीतियों से निर्णय लेना आसान होता है । इस प्रकार भूतकालीन तथ्यों पर आधारित ज्ञान एवम अध्ययन का उपयोग दूरगामी नीती निर्धारण में भी महत्वपूर्ण होता है । इन तथ्यों का अध्ययन काल श्रेणियों की सहायता से किया जाता है ।

11.2 काल श्रेणी का अर्थ

जब समय पर आधारित तथ्यों को एक श्रेणी मे क्रमबद्ध रूप से लिखा जाता है । तो यह काल श्रेणी कहलाती है ।इस श्रेणी में दो चर होते है । एक स्वतंत्र एवम् दूसरा आश्रित चर होता

है। स्वतंत्र चर समय से सम्बन्धित होता है । यह समय की इकाई को प्रदर्शित करता है । जैसे - सैकण्ड, मिनिट, घंटे माह, वर्ष आदि । दूसरा चर, आश्रित चर होता है । जो की अध्ययन कर्ता की जरूरत के अनुसार होता है । जैसे:- किसी वर्ष में दूध का कुल उत्पादन, किसी समय विशेष पर खाद्यानों का कुल उत्पादन, विभिन्न वर्षों में देश की जनसंख्या , किसी वर्ष में मोबाइल फोन की कुल बिक्री, किसी रोगी का समय आधारित तापक्रम आदि । इस प्रकार जब समय पर आधारित तथ्यों को संख्यात्मक रूप में व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत किया जाता है । तो उन्हें काल श्रेणी कहते है ।

11.3 काल श्रेणी की परिभाषा

काल श्रेणी को विभिन्न सांख्यिकायों ने निम्न प्रकार से परिभाषित किया है ।

1. **केने व कीपिंग** के शब्दों, में, समय पर आधारित समंक समूह काल श्रेणी कहलाते है ।
2. **क्राक्सटन व काउडेन** के अनुसार, समय के किसी माप (जैसे वर्ष, माह, सप्ताह आदि) के आधर पर प्रस्तुत समंको के क्रम को काल श्रेणी कहते है ।
3. **वर्नर हर्ष** के शब्दों में समय के क्रमिक बिन्दुओ के चर मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल श्रेणी कहलाता है ।
4. **लुन चाऊ** के शब्दों में एक काल श्रेणी को किसी आर्थिक चर अथवा मिश्रित चरों, की समयावधियों के रूप में परिभाषित किया जा सकता है ।
5. **फैफनबर्गर एवं पैअरसन** के अनुसार काल श्रेणी ऐसे सांख्यिकी समंको का समूह है जिन्हें काल क्रमानुसार संग्रहित, अभिलेखित किया जाता है ।

उपयुक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि सांख्यिकी तथ्यों का कालक्रम में व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुतीकरण ही काल श्रेणी कहलाता है ।

11.4 काल श्रेणी का महत्व

काल श्रेणी का महत्व बहुत अधिक है यह व्यापक रूप से आर्थिक, व्यवसायिक एवम् सामाजिक तक ही सीमित नही है। अपितु इसका अध्ययन समाजशास्त्री, वैज्ञानिक, अर्थशास्त्री आदि के लिए भी महत्वपूर्ण है । यह भावी घटनाओं का पूर्वानुमान लगाने में एवम् भविष्य के परिवर्तनों को समझने एवम् मूल्यांकन करने में सहायक है । काल श्रेणियों का महत्व निम्न कारणों से है ।

(1) व्यापार चक्र का पूर्वानुमान - चक्रीय उच्चावचनों की सहायता से व्यापार में होने वाले उतार- चढाव का अनुमान लगाया जा सकता है और इस आधार पर अपनी व्यापारिक एवं आर्थिक क्रियाओं को घटाया या बढाया जा सकता है ।

(2) भूतकालीन व्यवहारो का ज्ञान - काल श्रेणी के विश्लेषण से भूतकालीन व्यवहारों का ज्ञान सरलता से हो सकता है। भूतकालीन समंको का विश्लेषण करके निष्कर्ष निकाल सकते है और इन निष्कर्षो के आधार पर विभिन्न व्यापारिक आर्थिक व्यवहारों को नियन्त्रित कर सकते है ।

(3) भविष्य के बारे में अनुमान - काल श्रेणी के विश्लेषण से भविष्य की स्थिति का अनुमान लगा सकते है इस प्रकार भावी मांग एंव पूर्ति का अंदाज लगाया जा सकता है ।

(4) परिवर्तनो का अध्ययन - काल श्रेणी की सहायता से विभिन्न क्षेत्रों में विशेषतः आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन किया जा सकता है एवं इन परिवर्तनों के निष्कर्षो से लाभ उठाया जा सकता है ।

(5) सभी के लिए उपयोगी - काल श्रेणियों की उपयोगिता, व्यापारी या उधोगपतियों तक ही सीमित नही है । इससे उधोगपति कृषक, उपभोक्ता, प्रशासक, सभी लाभ उठा सकते है और अनुभवों के आधार पर अपनी क्रियाओं को नियन्त्रित व संचालित कर सकते है ।

11.5 काल श्रेणी - संघटक एव विचरण का कारण

काल श्रेणियों मे अनेक कारणों से विचरण या परिवर्तन होता है । एवम् काल श्रेणी को अनेक घटक प्रभावित करते है । इन परिवर्तनों को एवम् घटको को ही काल श्रेणी के संघटक कहते है । इन संघटको को मूल रूप से दो भागों में विभाजित किया जा सकता है ।

(1) दीर्घकालीन प्रवृति - काल श्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृति से आशय दीर्घकालीन परिवर्तनों से है । इसमें किसी लम्बे समय अन्तराल में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन वृद्धि या कमी के रूप में किया जाता है । जो कि इस समय में परिवर्तन की दिशा एवम् स्वरूप बताता है । दीर्घकालीन प्रवृतियों मे समय अन्तराल लम्बा होता है । जैसे :- 10 वर्ष, 15 वर्ष, 25 वर्ष, 50 वर्ष आदि । यदि देश में पिछले 50 साल की मृत्यु दर का आंकलन करे तो यह तथ्य सामने आता है कि मृत्यु दर में कमी हुई है । यदि पिछले 10 वर्ष में दूरसंचार श्रेत्र में भारत में मोबाइल फोन की बिक्री का अध्ययन करे तो यह स्पष्ट हो जाता है कि इसकी बिक्री में वृद्धि हुई है । दीर्धकाल में वृद्धि की प्रवृति एवम् वृद्धि कौ ह्रास होने का कारण वृद्धि एवम् ह्रास तत्वों का दीर्घकाल में उपस्थित होना है । यह प्रवृत्तियाँ सामान्यतः एक दिशा में होती है एवम् यह आकस्मिक रूप से न होकर नियमित व क्रमिक गति से होती है ।

इस प्रवृति मे अल्पकालीन परिवर्तन सम्मलित नही होते है बल्कि दीर्धकाल में हुए नियमित परिवर्तन सम्मालित होते है ।

(2) अल्पकालीन प्रवृत्ति - अल्पकालीन प्रवृत्ति अल्पकाल में काल श्रेणी में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करती है । यह अल्पकाल में होने वाले उतार - चढाव का अध्ययन है । इनकी अवधि अल्प होती है । काल श्रेणी में होने वाले परिवर्तनों को उच्चावचन भी कह सकते है। अल्पकालीन प्रवृत्ति मे तीन तरह के उच्चावचन होते है । मौसमी, चक्रीय एवं अनियमित उच्चावचन ।

(अ) मौसमी उच्चावचन - यह उच्चावचन अल्पकालीन लेकिन नियमित रूप से होते है । काल श्रेणी में एक वर्ष की समयावधि में होने वाले विचरण जो कि एक माह, एकदिन, एक सप्ताह या उससे भी कम समयान्तराल मे होते है । इनका कारण रितिरिवाज या जलवायु आदि हो सकता है । इस कारण से उत्पादन, बिक्री आय खर्च पर होता है । जैसे बरसात में छतो की बिक्री का बढ जाना और सर्दियों मे गर्म कपडों का मूल्य बढ जाना और दिवाली के आस पास वाहन बिक्री बढना आदि । शादी - विवाह के समय गहनो के दामों में या बिक्री में बढ़ोतरी भी होती है । अत: उत्पादन मूल्य, उपभोग, माँग आदि सभी में प्रतिवर्ष मौसमी कारणों से घट - बढ़ होती रहती है एवं प्रतिवर्ष पुनरावृत्ति भी होती है इसलिए काल श्रेणी से इनका पूर्वानुमान लगाना सम्भव है ।

(ब) चक्रीय उच्चावचन - चक्रीय उच्चावचन भी मौसमी उच्चावचन की तरह नियमित परन्तु इनकी अवधि मौसमी उच्चावचन से अधिक होती है । यह अवधि एक वर्ष से अधिक होती है । यह एक वर्ष से अधिक अवधि पर नियतकालिक होते है । यह एक तरंग की भाँति होते है ।

जिसमे प्रसार एवं सकुचंन दोनों होता है । चक्रीय उच्चावचन को व्यापार चक्र की क्रमानुसार चार अवस्था मे विभाजित कर सकते है:- समुद्धि प्रतिसार, अवसाद तथा पुनरूत्थान । जब व्यापार में समृद्धि की अवस्था होती है अर्थात मूल्य वृद्धि, मांग मे तेजी, आया अधिक, रोजगार, उत्पादन सभी बढते है । समृद्धि के चरण न व्यापार की प्रगति बहु त अधिक होती है और लाभ भी अधिक अर्जित किये जाते है । धीरे - धीरे मुद्रा की आवश्यकता अधिक होने लगती है, फलस्वरूप मांग मे कमी आने लगती है तो प्रतिसार की अवस्था प्रारम्भ होती है मांग में कमी आने से मूल्यों में गिरावट होती है । जिसका कारण रोकड की तरलता बढ़ना होता है । इससे उपभोक्ता में इस बात की सम्भावना बढ़ जाती है कि अभी मूल्यो मे गिरावट और आयेगी । इन सम्भावनाओ के कारण व्यापारिक गतिविधियां शिथिल होने लगती है, इस अवस्था का प्रतिसार कहते है । मूल्यों मे इस स्थिति में और कमी आने से धीरे - धीरे उत्पादन बन्द होने लगता है, मजदूरी एवं रोजगार कम हो जाते है । अब इसे अवसाद की स्थिति कहते है । धीरे धीरे मुद्रा फिर एकत्रित होती है जिससे सुधार की स्थिति आती है, जिसे पुनरूत्थान की स्थिति कहते है और यह अवस्था धीरे धीरे फिर समृद्धि की स्थिति में पहुँच जाती है । यह चारो अवस्था एक तंरग या वक्र को जन्म देती है । इसकी अवधि 3 वर्ष से लेकर कुछ वर्षो तक होती है । समान्यतया इसका अधिकतम समयावधि 10-12 वर्षो तक हो सकता है ।

(स) अनियमित उच्चावचन - काल श्रेणी में ऐसे उच्चावचन जो कि कभी कभी अनियमित, असामान्य या आकस्मिक कारणों से उत्पन्न होते है । जैसे:- युद्व, बाद, अकाल, भूकम्प, चुनाव, संधर्ष, हड़ताल आदि के कारण इन कारणो के कारण मूल्य उपभोक्ता, उत्पादन, मांग आदि प्रभावित होते है ।

ऐसे उच्चावचनं, काल श्रेणी में क्रमहीन होते है । तथा इनका पूर्वानुमान लगाना असम्भव होता है । वर्ल्ड ट्रैड सेन्टर (अमेरिका) पर आतंकी हमले के कारण शेयर बाजार का टूटना । ऐसे अनियमित उच्चावचन काल श्रेणी में अचानक आते है एवं इनका ठीक से पूर्वानुमान लगाना मुशकिल होता है ।

11.6 सारांश

जब समय पर आधारित तथ्यों को एक श्रेणी मे क्रमबद्व रूप से लिखा जाता है । तो यह काल श्रेणी कहलाती है । इस श्रेणी में दो चर होते है । एक स्वतंत्र एवम् दूसरा आश्रित चर होता है । स्वतंत्र चर समय से सम्बन्धित होता है । यह समय की इकाई को प्रदर्शित करता है । जैसे - सैकण्ड, मिनिट, घंटे, माह, वर्ष आदि । दूसरा चर, आश्रित चर होता है । जो की अध्ययन कर्ता की जरूरत के अनुसार होता है । जैसे:- किसी वर्ष में दूध का कुल उत्पादन, किसी समय विशेष पर खाद्यान्नों का कुल उत्पादन, विभिन्न वर्षो में देश की जनसंख्या, किसी वर्ष में मोबाइल फोन की कुल बिक्री, किसी रोगी का समय आधारित तापक्रम आदि ।

काल श्रेणी का महत्व बहुत अधिक है, यह व्यापक रूप से आर्थिक, व्यावसायिक एवम् सामाजिक तक ही सीमित नही है । अपितु इसका अध्ययन समाजशास्त्री, वैज्ञानिक, अर्थशास्त्री आदि के लिए भी महत्वपूर्ण है । यह भावी घटनाओ का पूर्वानूमान लगाने में एवम् भविष्य के परिवर्तनों को समझने एवम् मूल्यांकन करने में सहायक है । काल श्रेणियों मे अनेक कारणों से विवरण या परिवर्तन होता है । एवम् काल श्रेणी को अनेक घटक' प्रभावित करते है । इन परिवर्तनों को एवम् घटको को ही काल श्रेणी के संघटक कहते है । इन सघटकों को मूल रूप से दो भागों में विभाजित किया जा सकता है।

(1) दीर्घकालीन प्रवृत्ति (2) अल्पकालीन प्रवृत्ति ।

11.7 शब्दावली

काल श्रेणी (Time Series) : ऐसी श्रेणियां जो समय पर आधारित होती है, काल श्रेणियां कहलाती है ।

अल्पकालीन नीति (Short term Planning : ऐसी नीतियाँ जो अल्प समय के लिए बनाई जाती हैं अल्पकालीन नीतियाँ कहलाती है । इनमे समय का आधार सामान्यतः एक साल से कम होता है ।

दीर्धकालीन नीति (Long term Planning): दीर्धकालीन नीतियां लम्बे समय को आधार बनाकर बनाई जाती है इनमे समय का आधार एक साल से अधिक होता है ।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति (Long term Trend) : काल श्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अर्थ दीर्घकालीन परिवर्तनों से है । काल श्रेणी में लम्बे समय मे वृद्धि या कमी (परिवर्तन) की प्रवृत्ति दीर्घकालीन प्रवृत्ति कहलाती है ।

अल्पकालीन प्रवृत्ति (Short Term Trend) :काल श्रेणी में अल्पकालीन प्रवृत्ति का अर्थ अल्पकालीन परिवर्तनों से है। काल श्रेणी में अल्प समय में वृद्धि या कमी (परिवर्तन) की प्रवृत्ति अल्पकालीन प्रवृत्ति कहलाती है ।

मौसमी उच्चावचन (Seasonal Variations): काल श्रेणी में एक वर्ष के अन्दर होने वाले नियमित परिवर्तनों को मौसमी उच्चावचन कहते है ।

चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Variations): यह भी नियत कालिक परिवर्तन है परन्तु इनका समयान्तराल एक वर्ष से अधिक होता है ।

व्यापार चक्र (Business Cycle): व्यापार चक्र एक लहर की तरह है जो व्यापारिक गति विधियों को प्रभावित करते है एवं इसकी चार अवस्था होती है । समृद्धि प्रतिसार, अवसाद, पुनरूस्थान ।

समुद्धि (Properity): व्यपार चक्र की इस अवस्था में व्यापार में समृद्धि, उत्पादन, रोजगार, आय, क्रय शक्ति, मूल्य आदि में वृद्धि के कारण होती है ।

प्रतिसार (recession): इसके कारण उत्पादन का विक्रय कम होता है, आय घटती है एवं बेरोजगारी बढती है । यह कीमतो में वृद्धि. कम रूपत एवं कम आय का समय होता है । इसके कारण व्यापारिक गति कम होती है ।

अवसाद (Depression): जब व्यापारिक क्रियाओं की अवनति की निम्न सीमा आती है तो प्रतिसार अवसाद में परिवर्तित हो जाता है । अवसाद के बाद पुनरुत्त्थान होता है ।

पुनरूत्थान (Recovery):अवसाद के बाद पुन: समृद्धि की ओर प्रगति होती है तो उसे पुनरूत्थान कहते है । । इसमें व्यापारिक गतिविधियां पुनरूत्थान की ओर अग्रसर होती है ।

11.8 स्व - परख प्रश्न

1. काल श्रेणीका अर्थ एवं परिभाषा को समझाइए|
2. काल श्रेणी की उपयोगिता की विवेचना कीजिए ।
3. काल श्रेणी के संघटक क्या होते है । इसके विभिन्न संघटकों का उल्लेख कीजिए ।
4. काल श्रेणी में अल्प एवं दीर्घ अवधि में होने वाले परिवर्तनों का कारण सहित उल्लेख कीजिए ।
5. काल श्रेणी में विचरण का कारण बताइए ।

इकाई 12

काल श्रेणी का विघटन एंव गणितीय निदर्श

इकाई की रूप रेखा

12.0 उद्देश्य

12.1 प्रस्तावना

1.22 काल श्रेणी का विघटन

12.3 काल श्रेणी का गणितीय निदर्श

- योग निदर्श
- मिश्रित गुणात्मक/ निदर्श

12.4 योग मिश्रित/ गुणात्मक निदर्श में अन्तर

12.5 काल श्रेणी विघटन के उद्देश्य

12.6 सारांश

12.7 शब्दावली

12.8 स्व -परख प्रश्न

12.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेगें कि :

- काल श्रेणी का विघटन की प्रकिया समझ सके ।
- काल श्रेणी के गणितीय निदर्श को समझ सके ।
- काल श्रेणी का सम्पादन कर सके ।

12.1 प्रस्तावना

काल श्रेणी एक महत्वपूर्ण तकनीक है जो कि दूरगामी निर्णय लेने में सहायक है । इसके प्रयोग में भूतकालीन तथ्यों का प्रयोग करके भविष्य मे होने वाले परिवर्तनो का पता लगाने में सहायक है । पिछली इकाई में हम काल श्रेणी का अर्थ एवं इसकी विभिन्न परिभाषा का अध्ययन कर चुके है । काल श्रेणी में किस तरह की प्रवृति एवं उच्चावचन आते है । यह सभी हमने पिछली इकाई में अध्ययन किया था । हम पिछली इकाई के अध्ययन को आगे जारी रखते हुए इस इकाई में इसका विघटन, गणितीय निदर्श एवं सम्पादन की चर्चा करेंगे ।

12.2 काल श्रेणी का विघटन

जब काल श्रेणी के विभिन्न घटको का अलग अलग अध्ययन किया जाता है तब इसे काल श्रेणी का विघटन कहते है । इससे यह पता चलता है कि काल श्रेणी के मूल समंको (आरिजन डाटा) में दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन प्रवृति कितनी है एवं ये नियमित या अनियमित होते है । काल श्रेणी के मूल समंक दीर्घकालीन प्रवृत्ति मौसमी उच्चावचन, चक्रीय उच्चचावचन एंव अनियमित उच्चावचन से किस रूप से प्रभावित होते है । काल श्रेणी इन चारों का सामूहिक

सम्मिश्रण है । इनको अलग- अलग करके इसका अध्ययन करना ही मूलत इसका विघटन या विश्लेषण कहलाता है ।

12.3 काल श्रेणी का गणितीय निदर्श

काल श्रेणी का विघटन के लिये निम्नलिखित दो गणितीय निदर्श प्रयोग में लाते हैं | योग निदर्श, मिश्रित निदर्श|

(1) योग निदर्श (Addititive Model)

इस निदर्श की मूल धारणा यह है कि वास्तविक समंक, काल श्रेणी के चारों संघटक अंगो का योग होता है ।

सूत्रानुसार:- O=T+S+C+I

यहां O=वास्तविक / मूल समंक

T= दीर्घकालीन प्रवृति

S= मौसमी उच्चावचन

C=चक्रीय उच्चावचन

I= अनियमित उच्चावचन

इस धारणा के आधार पर दीर्घकालीन प्रवृति (T) को मूल समंको मे से घटाकर अल्पकालीन प्रवृत्ति या उच्चावचनो को अलग किया जाता है ।

उदाहरणार्थ,

O-T=S+C+I (अल्पकालीन प्रवृत्ति)

अल्पकालीन प्रवृति में से मौसमी उच्चावचन घटाकर चक्रीय एंव अनियमित उच्चावचनो का अनुमान लगाया जा सकता है ।

उदाहरणार्थ,

O-T-S=C+I (चक्रीय एवं अनियमित उच्चावचन)

इसी प्रकार अल्पकालीन उच्चावचनो (O-T) में से मौसमी एंव चक्रीय उच्चावचनो (S+C) को घटाकर अनियमित परिवर्तन (I) ज्ञात कर सकते है ।

(O-T)-(S+C)=I (अनियमित उच्चावचन)

(2) मिश्रित/ गुणात्मक निदर्श (Mixed /Multiplicative Model)

इस धारणा में काल श्रेणी के मूल समंकों (O) को विभिन्न संघटकों का गुणन फल माना जाता है ।

सूत्रानुसार

O=T $\times S \times C \times I$ (दीर्घकालीन प्रवृति)

इसके प्रयोग से विभिन्न अल्पकालिन उच्चावचनो का मापन एंव पृथक्करण निम्न प्रकार से किया जाता है ।

उदाहरणार्थ

$0 \div T = S \times C \times I$ (अल्पकालीन प्रवृत्ति)

$0 \div T \times S \times C = I$ (चक्रीय एवं अनियमित उच्चावचन)

$0 \div T \times S \times C = I$ (अनियमित उच्चावचन)

12.4 योग व गुणात्मक निदर्श में अन्तर

योग व गुणात्मक निदर्श में निम्न अन्तर है ।

- योग निदर्श मे वास्तविक समंक सभी संघटकों का योग है, जबकि गुणात्मक निदर्श मे इनका गुणनफल होता है ।
- योग निदर्श में संघटक वास्तविक समंको की इकाई में व्यक्त किये जाते है । जबकि गुणात्मक निदर्श मे केवल प्रवृत्ति, गुल समंको की इकाई में होती है और शेष उच्चावचन प्रवृत्ति के अनुपात में होते है । अत: यह सूचकांकों के रूप में प्रदर्शित किये जाते है ।
- योग निदर्श में विभिन्न घटक एक दूसरे से प्रभावित नही होते है जबकि गुणात्मक निदर्श में यह परस्पर आश्रित व बी गणितीय सम्बन्ध रखते है ।

12.5 काल श्रेणी विघटन के उद्देश्य

इसके विघटन से निम्न उद्धेश्यों की प्राप्ति होती है ।

- भविष्य की योजना बनाना आसान होता है,
- व्यावसायिक संस्था की सांख्यिकीय स्थिति का मापन समन्वय होता है ।
- विभिन्न विचरणों /उच्चावचनो के प्रभाव को कम करने की योजनाये बनाई जा सकती है।
- व्यवसायी आर्थिक घटनाक्रम की गति को समझकर विभिन्न निर्णय ले सकते है ।

12.6 सारांश

काल श्रेणी एक महत्वपूर्ण तकनीक है जो कि दूरगामी निर्णय लेने में सहायक है ।

इसके प्रयोग में भूतकालीन तथ्यों का प्रयोग करके भविष्य मे होने वाले परिवर्तनो का पता लगाने में सहायक है ।जब काल श्रेणी के विभिन्न घटकों का अलग अलग अध्ययन किया जाता है तब इसे काल श्रेणी का विघटन कहते है । इससे यह पता चलता है कि काल श्रेणी के मूल समंको (आरिजन डाटा) में दीर्घकालीन एवं अल्पकालीन प्रवृत्ति कितनी है एवं ये नियमित या अनियमित होते है । काल श्रेणी का विघटन के लिए निम्नलिखित दो गणितीय निदर्श प्रयोग में लाते है - योग निदर्श, मिश्रित निदर्श । योग निदर्श में वास्तविक समंक सभी संघटकों का योग है, जबकि गुणात्मक निदर्श मे इनका गुणनफल होता है ।

12.7 शब्दावली

योग निदर्श (Additive Model): योग निदर्श के अनुसार काल श्रेणी मे वास्तविक समंक, सभी संघटकों का योग होता है ।

गुणात्मक निदर्श (Multiplicative Model): गुणात्मक निदर्श के अनुसार मूल समंक विभिन्न संघटकों का गुणनफल होता है ।

12.8 स्व- परख प्रश्न

1. काल श्रेणी का विघटन क्या होता है? स्पष्ट करे ।

2. काल श्रेणी के योग निदर्श व गुणात्मक निदर्श से काल श्रेणी की प्रवृति। स्पष्ट करें ।

इकाई- 13

प्रवृत्ति का मापन

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

13.1 प्रस्तावना

13.2 प्रवृत्ति का मापन करने की रीतियां

- मुक्त-हस्त वक्र रीति
- अर्द्ध - मध्यक रीति
- चल माध्य रीति
- न्यूनतम वर्ग रीति

13.3 सारांश

13.4 शब्दावली

13.5 स्वपरख प्रश्न

13.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन से आप इस योग्य हो सकेंगे कि :-

- प्रवृत्ति का मापन का प्रयोग समझ सके ।
- प्रवृत्ति के मापन की विधियों के गुण - दोष समझ सके ।
- प्रवृत्ति के मापन की विभिन्न विधियों को समझ सके ।
- प्रवृत्ति के मापन का कारण समझ सके ।

13.1 प्रस्तावना

काल श्रेणी में प्रवृत्ति का मापन / विश्लेषण महत्वपूर्ण है । पिछली इकाई में हम काल श्रेणी के विघटन की चर्चा की है । इस इकाई में दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने की विधियॉ एवं विश्लेषण की तकनीक का अध्ययन करेंगे । प्रवृत्ति मापन / विश्लेषण से भावी पूर्वानुमान लगाये जा सकते है जो कि व्यावसायिक नियोजन में सहायक होते है यदि परिस्थितियो में कोई आमूल्य परिवर्तन न हो तो भावी प्रवृत्ति के अनुमान यर्थोचित रूप से परिशुद्ध होते है । अत: काल श्रेणी की प्रवृत्ति का मापन महत्वपूर्ण तकनीक है । यहां हम दीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापन की विभिन्न विधियों की चर्चा करेगे ।

13.2 प्रवृत्ति का मापन करने की रीतियां

प्रवृत्ति का प्रकार क्या है दीर्घकालीन या अल्पकालीन प्रवृत्ति । यहां हम दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने की विधि का अध्ययन करेंगें । दीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन निम्न चार रीतियों द्वारा किया जा सकता है ।

1. मुक्त हस्त वक्र रीति
2. अर्द्ध मध्यक रीति
3. चल माध्य रीति
4. न्यूनतम वर्ग रीति

(1) मुक्त हस्त वक्र रीति (Free Hand Curve Method)

इस रीति में काल श्रेणी को ग्राफ पर करके एक कालिक चित्र बनाते है ।

इसके बाद समंकों के उतार चढाव को ध्यान में रखते हुए उच्चावचनो के बीच से गुजरती हुई एक सरल रेखा खीचतें है इस सरल रेखा के अन्तिम छोर को आगे बढाने पर यह काल समको की दीर्धकालीन उपनति को स्पष्ट करता है ।

गुण:

1. यह रीति सरलतम है ।
2. यह सरलता एवं शीध्रता से केवल निरीक्षण एवं अनुभव से बनाया जा सकता है ।
3. इसके लिए गणितीय प्रयोग एवं सूत्रो की आवश्यकता नही है ।

दोष :

1. यह रीति संख्यिक के अनुभव पर निर्भर करती है अत: पक्षपात की भावना से प्रभावित हो सकती है ।
2. यह एक व्यक्तिनिष्ठ रीति है अत: विभिन्न व्यक्ति इसके लिए विभिन्न वक्र को बनायेगे ।
3. इस रीति में परिशुद्धता का अभाव होता है ।
4. यह रीति अनुमान पर आधारित होती है ।

(2) अर्द्ध - मध्यक रीति (Semi Average Method):

इस रीति में श्रेणी को दो भागो मे बाटं कर (पूर्वार्द्व एवं अत्तरार्द्व), प्रत्येक भाग का समान्तर माध्य निकाल कर उसे उस भाग के मध्यका समय बिन्दु के सामने रखा जाता है । फिर इन दोनो माध्यों को ग्राफ में मध्यका बिन्दुओ के ऊपर प्रांकित करके मिलाते है । इससे प्राप्त सरल रेखा ही अर्द्ध मध्यक रीति द्वारा प्राप्त प्रवृत्ति रेखा है । यदि काल श्रेणी में कुल वर्षों की संख्या अयुग्म (Odd)हो तो मध्य के समंक को छोड़ देते है एवं शेष क्रिया पूर्ववत् रहती है । उदाहरणार्थ, अर्द्ध मध्यक रीति द्वारा 11 वर्षों के मूल्यो की उपनति ज्ञात करने के लिए छठे (केन्द्रीय) वर्ष को छोडकर पहले 5 और बाद के 5 वर्षो के माध्यो को रेखाचित्र पर अंकित करके उपनति प्राप्त की जा सकती है ।

गुण:

1. यह सरल रीति है ।
2. यह शीघ्रता से हल होती है ।

दोष:

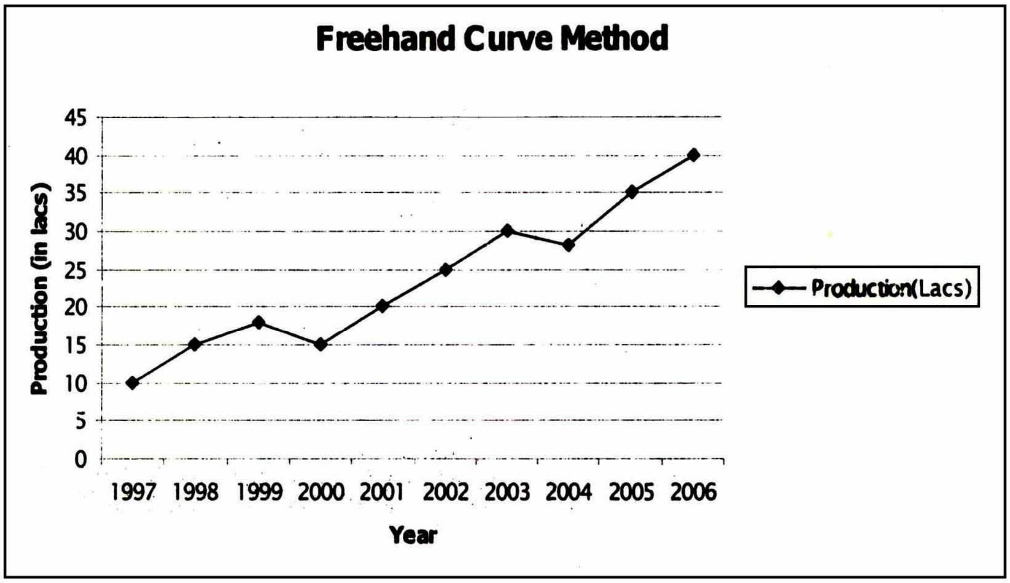
1. यह रीति भी कुछ हद तक अनुमान पर आधारित होती है ।
2. इसमें भी पूर्णता परिशुद्धता का कुछ अर्श तक अभाव हो सकता है ।

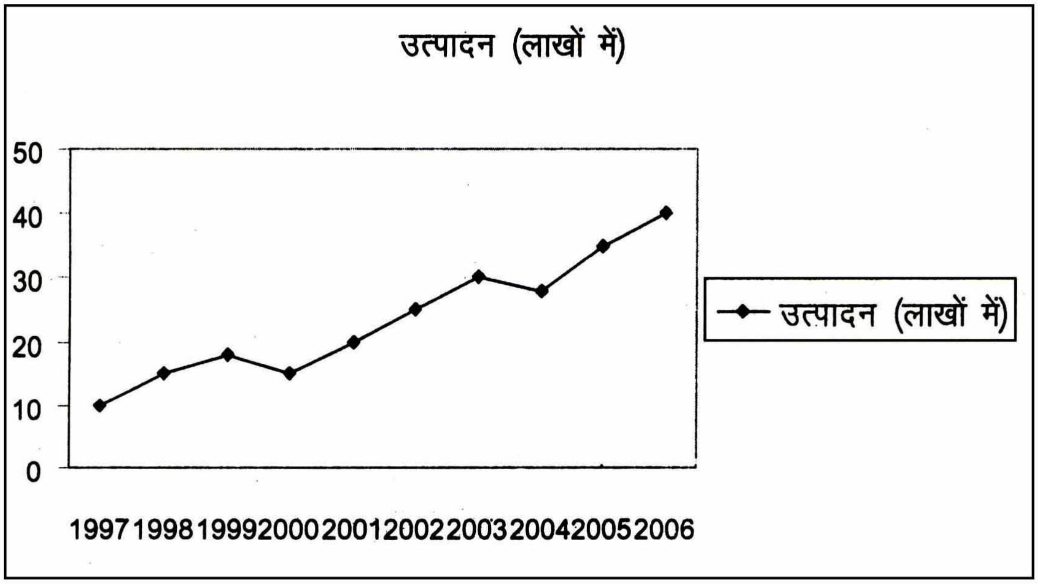
उदाहरण (Illustration)1 :- कोटा कुटीर उद्योग के उत्पादन से सम्बन्धित आकड़े निम्नलिखित है:

वर्ष	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन	10	15	18	15	20	25	30	28	35	40

(लाखों में)

मुक्त हस्त वक्र रीति द्वारा उपनति, ग्राफ पर दर्शाइए ।





उदाहरण (Illustration) 2 :

अर्द्ध मध्यक रीति से उपनति का निरूपण निम्नांकित समंको की सहायता से कीजिए

वर्ष	**लाभ (लाख रु. मे)**
1995	10
1996	12

1997	16
1998	08
1999	06
2000	14
2001	15
2002	10
2003	14
2004	20
2005	13
2006	18

उत्तर :-

इस काल श्रेणी मे कुल वर्ष 12 है अत: सम्पूर्ण काल श्रेणी को 6-6 वर्षो के दो भागो में विभाजित करके उनका माध्य ज्ञात करते है ।

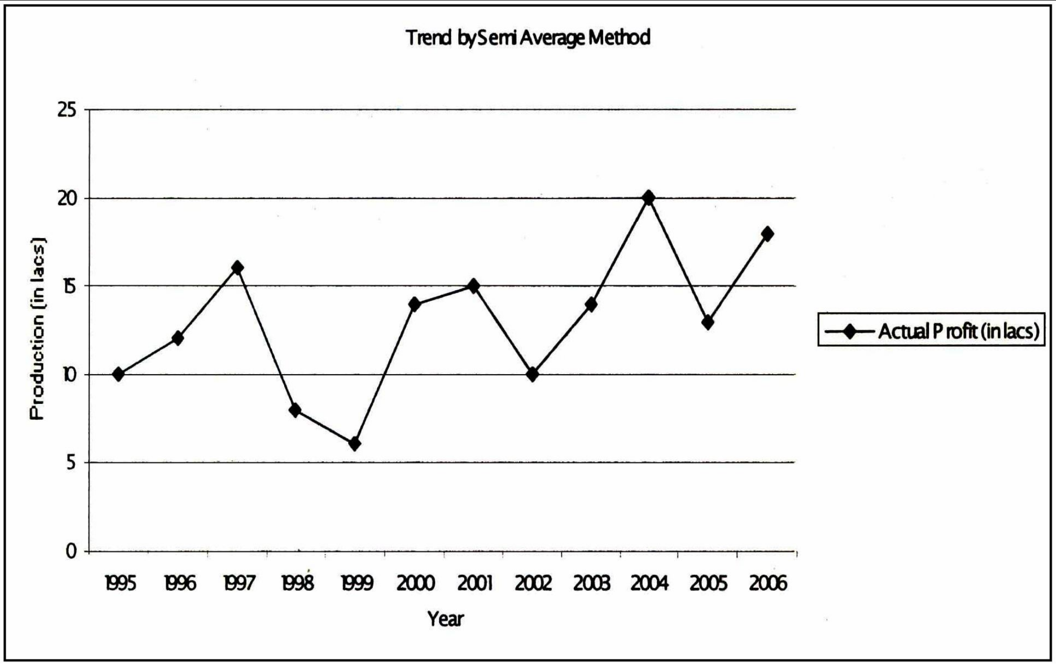
प्रथम भाग का समान्तर माध्य = $\frac{10+12+16+8+6+14}{6} = 11$

दूसरे भाग का समान्तर माध्य = $\frac{15+10+14+20+13+18}{6} = 15$

इन प्राप्त समान्तर माध्यों मे से प्रथम को पहले 6 वर्षो के मध्यका बिन्दु 1997 एवं 1998 के मध्य में एवं दूसरे को अन्तिम 6 वर्षो के मध्यका वर्ष 2003 एवं 2004 के मध्य में ग्राफ पर प्रांकित करते है । इससे प्राप्त उपगति को नीचे ग्राफ पर प्रदर्शित किया गया है ।

वर्ष	लाभ (लाख रू)	कुल योग	अर्द्ध मध्यक	मध्यका बिन्दु
1995	10			
1996	12			
1997	16			
		66	66 ÷6=11	1997/1998
1998	0			
1999	6			
2000	14			
2001	15			
2002	10			
2003	14			
		90	90÷6=15	2003/2004
2004	20			

2005	13			
2006	18			



(3) चल माध्य रीति (Method of Moving Average)

दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने के लिए चल माध्य रीति भी महत्वपूर्ण हैं । इसमें चलमाध्य निकालने के लिए निश्चित अवधि को आधार बनाते है यह अवधि 3.5.7 वर्ष या 4,8,8 वर्ष मे हो सकती है । इस अवधि का निर्धारण करने के बाद निम्नलिखित प्रक्रिया करते है ।

(अ) चलमाध्य रीति पाचं वर्ष के लिए

इसके प्रमुख बिन्दु निम्न है ।

(1) चल माध्य रीति में 5 वर्ष की समयावधि निश्चित की गई है । तो माध्य अवधि भी 5 वर्ष होगी ।

(2) अब प्रथम 5 वर्षा के समको का मूल्य जोडकर तीसरे वर्ष (मध्य वर्ष) के सामने लिखते है ।

(3) इसके बाद प्रथम वर्ष के समंक का मूल्य छोडकर अगले पांच वर्ष के समको का मूल्य जोडकर चौथे वर्ष के सामने रखेगें ।

(4) यह क्रिया तब तक करते है जब तक कि श्रेणी के अन्तिम पद तक न पहुंच जायें ।

(5) अब इन पंचवषीर्य समंको के योग को पाचं वर्ष से विभाजित करके पंचवर्षीय चल माध्य प्राप्त किये जाते है|

(6) प्रथम दो और अन्तिम दो वर्षों के स्थान रिक्त रहेंगे अर्थात उनके सामने चलमाध्य नही होगें ।

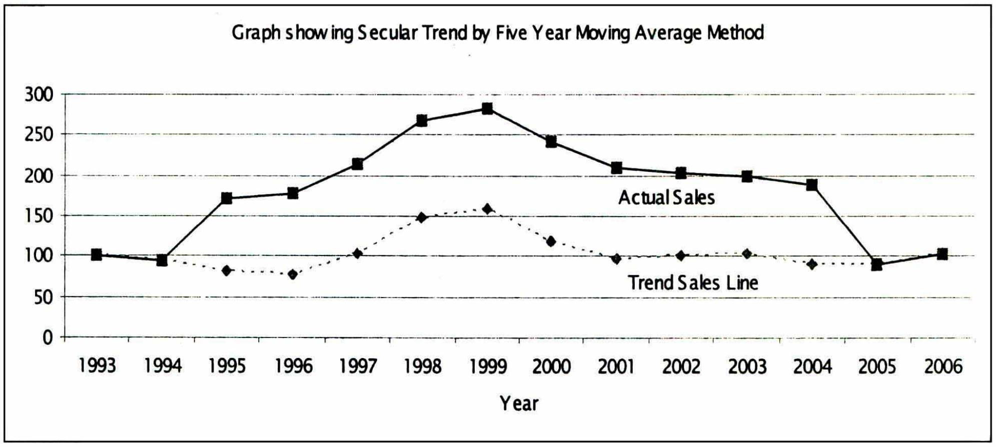
उदाहरण (Illustration) 3

पंचवर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए एवं ज्ञात प्रवृत्ति मूल्यों को रेखाचित्र पर दर्शाइए ।

वर्ष	कुल बिक्री (लाख रू. में)
1993	100
1994	94
1995	81
1996	78
1997	102
1998	147
1999	158
2000	118
2001	96
2002	101
2003	103
2004	91
2005	89
2006	103

उत्तर: पंचवर्षीय चलमाध्यों का आगणन निम्न है ।

वर्ष	कुल बिक्री लाख रू में	पंचवर्षीय चल योग	पंचवर्षीय चल मध्य प्रवर्ति मूल्य
1993	100	----	----
1994	94	----	----
1995	81	455	91
1996	78	502	100
1997	102	566	113
1998	147	603	121
1999	158	621	124
2000	118	620	124
2001	96	576	115
2002	101	509	102
2003	103	480	96
2004	91	487	97
2005	89	----	----
2006	103	----	----



(ब) चारबर्षीय चल माध्य रीतिः-

यदि चार वर्षीय चल माध्य ज्ञात करना है तो पहले चार वर्षों के समंको का मूल्य जोडकर दूसरे और तीसरे वर्ष के बीच में रखते है फिर अगले जोडकर (दूसरे से पांच वर्ष तक), तीसरे और चौथे वर्ष के बची में रखते है और इसी प्रकार अन्त तक रखा जाएगा । फिर पहले और दूसरे चार वर्षीय योग को जोडकर तीसरे वर्ष के सामने, दूसरे और तीसरे चार वर्षीय योग को जोडकर चौथे वर्ष के सामने रखते है । इस प्रकार आठवर्षीय योग प्राप्त होता है इसे चार वर्षीय युग्मो का योग कहते है । इसे अब 8 से भाग देकर चार वर्षीय चल माध्य प्राप्त होता है ।

गुण : -

(1) यह समझने में एवं प्रयोग मे सरल है ।

(2) इसमे परिणाम व्यक्तिनिष्ठ नही होते है ।

(3) इसमे पक्षपात का अभाव होता है ।

(4) यह परिशुद्ध परिणाम देती है ।

दोष -

(1) चल माध्य अवधि निश्चित करना कठिन कार्य है ।

(2) यह नियमित परिवर्तनों वाली काल श्रेणी में ही अधिक उपयुक्त विधि है ।

(4) न्यूनतम वर्ग रीति (Least Square Method)

यह रीति दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने की सर्वोत्तम रीति है । इस रीति के अनुसार गणितीय समीकरणों के प्रयोग से काल श्रेणी के लिए एक रेखा खींची जाती है । यह रेखा या तो सरल रेखा हो सकती है या परवलयिक वक्र के रूप में खींची जा सकती है । इसमें प्रयुक्त आधारभूत समीकरण निम्न हो सकता है ।

$Y=a+bX$ (आधारभूत समीकरण)

Y = उपनति मूल्य (Required trend value) है,

X = काल इकाई (Unit of टाइम) है,

$a \& b$ = अचर मूल्य (Constants) है ।

अचरमूल्यों को दो विधि से ज्ञात किया जा सकता हैं | (अ) दीर्घरीति (ब) लघुरीति

(अ) दीर्घ रीति (Least Square long method)

इस विधि के प्रमुख बिन्दु निम्न हैं |

(1) समय बिन्दुओं को क्रम संख्या 1,2,3,---------- से प्रयुक्त हैं | ये क्रम संख्या x द्वारा व्यक्त की जाती है तथा इनका योग $\sum X$ होता हैं |

(2) इनके वर्गों का योग $\sum x^2$ ज्ञात करते हैं |

(3) X और मूल ज्ञात समंको Y के तत्संवादी मूल्यों को गुणा करके उनका जोड़ $\sum XY$ निकाला जाता हैं |

(4) फिर Y मूल्यो का जोड़$\sum Y$ ज्ञात करते हैं |

(5) $\sum x$, $\sum X^2$, $\sum XY$ व $\sum Y$ निकालने के बाद निम्न प्रसामान्य समीकरणों से a और b को मूल्य ज्ञात करते हैं |

$$\sum Y = Na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X^2$$

a और b ज्ञात होने के बाद सरल रेख के आधारभूत समीकरण Y=a+bX से प्रवृति मूल्य (Trend value) ज्ञात कर सकते हैं इसे निम्न उदाहरण से स्पष्ट करते हैं |

उदाहरण (Illustration) 4

निम्नलिखित समंकों का न्यूनतम वर्ग रीति उपरीति मूल्य ज्ञात कीजिए तथा 2007 के लिये उपनीति मूल्य का अनुमान भी लगाइए|

वर्ष	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन	8	10	15	13	14

उत्तर

प्रवृति मूल्य परिकलन (न्यूनतम वर्ग रीति)

वर्ष	उत्पादन Y	X	X^2	XY	उपनति मूल्य
2002	8	1	1	8	7.5+(1)=9
2003	10	2	4	20	7.5+1.5(2)=10.5
2004	15	3	9	45	7.5+1.5(3)=12
2005	13	4	16	5270	7.5+1.5(4)=13.5
2006	14	5	25	$\sum XY$=195	7.5+1.5(5)=15
N=5	$\sum Y$=60	$\sum x$=15	$\sum X^2$=55	XY	$\sum Yc$=60

a और b के मान ज्ञात करने के लिए निम्न दो समीकरण का प्रयोग करते है ।

$$\sum Y = Na + b\sum x$$

$$\sum XY = a\ \sum X = a\sum X + b\sum X^2$$

दोनों समीकरणों में मान रखने पर,

60=5a+15b----------------------------------1

195=15a+55b-------------------------------2

समीकरण (1) को- 3 से गुणा करने पर एंव दोनों समीकरणों को आपस मे घटाने पर,

$180=15_a+45b$

$$\frac{195=15_a55b}{-15=-10b}$$

b=1.5, b का मान समीकरण (1) में रखने पर,

60=5 a+15X1.5 या a=7.5

अब वर्ष 2007 के लिए उपनति मूल्य का अनुमान समीकरण Y=a+bx से ज्ञात करते है। यहाँ वर्ष 2007 के लिए x का मान समय बिन्दु में क्रम संख्या 6 होगा ।

Y=a+bx

Y=7.5+1.5(6)

Y=16.5

अत: 2007 में कुल उत्पादन का उपनति मूल्य 16.5 ईकाइ होगा ।

(ब) लघु रीति :(least Square Short Method)

इस रीति के प्रमुख बिन्दु निम्न है ।

(1) समय बिन्दुओ में मध्य समय को 0 मानकर वर्षो का काल विचलन निकालते है जो कि शून्य से पहले की ओर ऋणात्मक -1, -2,-3 आदि और बाद मे धनात्मक 1,+2,+3 आदि होता है । एवं इनका बीजगणितीय योग ∑x शून्य होता है ।

(2) यदि समय बिन्दुओ का मध्य समय बिन्दु एक से ज्यादा है तो शून्य को छोडकर बाकी संख्या समय बिन्दुओ का काल विचलन होता है ।

(3) अब ∑Y, ∑XY, तथा $\sum X^2$ की गणना करते है ।

(4) a और b के मान ज्ञात करते है:-

$a=\sum Y/N \quad b=\sum XY/\sum X^2$

(5) अन्त में समीकरण y=a+bxसे उपनत्ति मूल्य ज्ञात करते है ।

इस रीति का निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया गया है ।

उदाहरण (Illustration) 6

न्यूनतम वर्ग की लधु रीति से निम्नलिखित समंको के उपनत्ति मूल्य ज्ञात कीजिए एवं वर्ष 2007 के लिए उपनति मूल्य का अनुमान भी लगाइए ।

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन	80	90	92	83	94	99	92

उत्तर:- उपनति मूल्यों का आकलन (लघु रीति) से निम्न प्रकार करते है ।

वर्ष	उत्पादन Y	X	X^2	XY	उपनति मूल्य
2000	80	-3	9	-240	90+2(-3)=84
2001	90	-2	4	-180	(0+2(-2)=86

2002	92	-1	1	-92	90+2(-1)=88
2003	83	0	0	0	90+2(0)=90
2004	94	1	1	94	90+2(1)=92
2005	99	2	4	198	90+2(2)=94
2006	99	3	9	276	90+2(3)=96
N=7	92	$\sum X=0$	$\sum X^2=28$	$\sum XY=56$	$\sum Y_c=630$

आधारभूत समीकरण

$\sum Y=Na$

$a=\sum Y/N=630/7=90$

$\sum XY=b\sum X^2$

$B=\sum Y/\sum X2=56/28=2$

उपनति समीकरण

$Yc=a+bX$

वर्ष 2007 के लिए X=4

अत. $Yc=90+2(4)$

उपनति मूल्य $Yc=98$

गुण :-

(1) न्यूनतम वर्ग रीति प्रवृत्ति माप की सर्वोत्तम रीति है ।

(2) इसके द्वारा ज्ञात मूल्य परिशुद्ध एवं उपयुक्त होते है ।

(3) इसमें व्यक्तिगत अभिनति नही होती है ।.

दोष :-

(1) जटिल गणित क्रिया का ज्ञान आवश्यक है ।

(2) इस रीति में लचीलापन नही है ।

(3) मूल समंकों में मूल्यो का अन्तर करने पर प्रवृत्ति समीकरण बदल जाता है ।

13.2 सारांश

प्रवृति मापन / विश्लेषण से भावी पूर्वानुमान लगाये जा सकते हैं जो कि व्यावसायिक नियोजन में सहायक होते है यदि परिस्थितियों में कोई आमूल्य परिवर्तन न हो तो भावी प्रवृत्ति के अनुमान यथोचित रूप से परिशुद्ध होते है । अत: काल श्रेणी की प्रवृत्ति का मापन महत्वपूर्ण तकनीक है । यहां हम दीर्घकालीन प्रवृत्ति के मापन की विभिन्न विधियों की चर्चा करेंगे ।

प्रवृत्ति का मापन करने की विभिन्न रीतिया है जो कि इस बात पर निर्भर करती है कि काल श्रेणी मे प्रवृत्ति का प्रकार क्या है दीर्घकालीन या अल्पकालीन प्रवृत्ति । यहां हम दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने की विधि का अध्ययन करेंगें । दीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन निम्न चार रीतियों द्वारा किया जा सकता है ।

1. मुक्त हस्त वक्र रीति 2. अर्द्ध मध्यक रीति

3. चल माध्य रीति　　　　4. न्यूनतम वर्ग रीति

13.3 शब्दावली

काल श्रेणी की प्रवृत्ति (Trend in time series): कल श्रेणी की प्रवृत्ति दो तरह की हो सकतीं हैं |दीर्घकालीन प्रवृत्ति दो अल्पकालीन प्रवृत्ति ।

काल श्रेणी का विश्लेषण की तकनीक (Analysis of time series Techniques): काल श्रेणी की विभिन्न तकनीक इसके विश्लेषण में सहायक है । यह तकनीके इसमें होने वाले परिवर्तनों को बताती है ।

काल श्रेणी की दीर्घकालीन प्रवृत्ति का मापन की रीतियाँ (Techniques to determine long trem trend इन time series): काल श्रेणी मे होने वाले दीर्घकालीन प्रवृत्ति को नापने की मुक्त हस्त वक्र रीति, अर्द्ध मध्यम रीति, चलमाध्य रीति, न्यूनतम वर्ग रीति आदि है ।

मुक्त हस्त वक्र रीति (Free hand curve Method): इस रीति मे काल श्रेणी को ग्राफ पर प्राकित करके एक ग्राफ बनाते है । एवं इसकी सहायता से दीर्घकालीन प्रवृत्ति का मान ज्ञात करते है ।

अर्द्ध मध्यक रीति (Semi Average Method): इस रीति में काल श्रेणी को दो भागो में बाटकर अर्द्धमध्यक ज्ञात करते है । एवं मध्यका बिन्दु निकालते है इससे एक सरल रेखा इन बिन्दुओ को मिलाकर खीचते है । यह सरल रेखा प्रवृत्ति को बताती है ।

चल माध्य रीति (Mothed of moving Average): यह समय या विषय समय अवधी की हो सकती है । इससे भी प्रवृत्ति ज्ञात करते है यह पिछले दो रीतियों से अच्छी रीति है।

न्यूनतम वर्ग रीति (Least Square Method): यह रीति दीर्घकालीन प्रवृत्ति को मापने की सर्वोत्तम रीति है यह गणीतियों समीकरणों पर आधारित है ।

उपनति मूल्य (Trend value): यह किसी समय में संभावित मूल्यों का मान है । यह वास्तविक मूल्यों से भिन्न एवं प्रवृत्ति के मानो से उत्पन्न मूल्य है ।

13.4 स्व परख प्रश्न

1. काल श्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृत्तियों का मापन कैसे किया जाता है । समझाइए ।
2. उपनति क्या है? न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य कैस मालूम करेंगे? संख्यात्मक उदाहरण देकर समझाइए ।
3. दीर्घकालीन प्रवृत्ति ज्ञात करने की चल माध्यम रीति को समझाइए ।
4. निम्न समंको से मुक्त हस्त वक्र रीति द्वारा प्रवृत्ति रेखा निर्धारित कीजिए?

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन (000)	95	97	102	100	104	102	105

5. निम्न समंको से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति की गणना कीजिए ।

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005

उत्पादन (000)	35	56	79	80	90	60

6. चार वर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए :-

वर्ष	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
उत्पादन (000)	3	4	8	10	9	11	13	14	12	15	18	20

इकाई-14

मौसमी निर्देशांकों का मापन

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य

14.1 प्रस्तावना

14.2 मौसमी निर्देशांको के माप की विभिन्न रीतियाँ

- मौसमी माध्य विधि
- चल माध्य विधि
- श्रृंखला मुल्यानुपात विधि
- चलमाध्य अनुपात विधि

14.3 सारांश

14.4 शब्दावली

15.5 स्व परख प्रश्न

14.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेगें कि :-

- मौसमी निर्देशांको की गणना एवं पहचान कर सकें ।
- विभिन्न मौसमी निर्देशांको को विभिन्न तकनीक से ज्ञात कर सके ।
- मौसमी निर्देशांको के द्‌वारा भविष्य की नीति बना सके ।

14.1 प्रस्तावना

अभी तक आप पिछली तीन इकाईयों में काल श्रेणी का अध्ययन कर चुके है । काल श्रेणी में अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन प्रवृत्ति का ज्ञान हुआ है । पिछली इकाईयों में हमने काल श्रेणी मे होने वाले परिवर्तनों के कारण का अध्ययन भी किया है काल श्रेणी मे दीर्घकालीन प्रवृत्ति की विभिन्न रीतियों को हमने विस्तार से अध्ययन किया है । काल श्रेणी मे अल्पकालीन प्रवृत्ति को मापने की विधियों को यहां विस्तार से चर्चा की जा रही है ।

अल्पकालीन प्रवृत्ति मे विभिन्न मौसमी, चक्रीय, आदि परिवर्तन होते है यहां इनकी विभिन्न रीतियों का उल्लेख किया जा रहा है ।

14.2 मौसमी निर्देशकों के माप की विभिन्न रीतियां (seasonal average Method)

इनको मापने की निम्न विधियां है ।

1. मौसमी माध्य विधि
2. चलमाध्य विधि
3. श्रृंखला मुल्यानुपात विधि
4. चल माध्य अनुपात विधि

(1) मौसमी माध्य विधि

इस विधि का प्रयोग उस समय करते है जबकि आकड़ों मे कोई महत्वपूर्ण चक्रीय परिवर्तन नही हो । इस विधि के प्रमुख पद निम्न है-

1. सबसे पहले एक समान महीन/त्रैमासिक अवधियो आदि के मूल्यो को जोड़कर एवं उनकी संख्या से भाग देकर उनका माध्य ज्ञात किया जाता है ।
2. इसके बाद इनको जोड़कर एवं इनकी संख्या से भाग देकर इनका माध्य या (माध्यों का माध्य) समान्य माध्य (मौसमी माध्य) ज्ञात करते है ।
3. इसके बाद प्रत्येक महीने /त्रैमासिक अवधि का मौसमी निर्देशक निम्न सूत्र से ज्ञात करते है ।

मौसमी निर्देशांक (मासिक अवधि के लिए) $\frac{\text{मासिक माध्य / (माध्य)}}{\text{माध्यों का माध्य / (समान्य माध्य)}} \times 100$

या

मौसमी निर्देशाक (त्रैमासिक अवधि के लिए) न= $\frac{\text{त्रैमासिक माध्य}}{\text{समान्य माध्य}} \times 100$

उदाहरण (Illustration) : 1

गत पाँच वर्षो में भारत से किसी वस्तु के निर्यात के ऑकडे (करोड रू. में) नीचे दिए गए है । उनसे आर्वत सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्ट्बर	नवम्बर	दिसम्बर
2001	28	20	30	20	19	23	24	26	26	19	30	28
2002	33	20	35	18	20	20	22	22	22	23	26	32
2003	29	26	26	23	18	23	26	26	26	23	29	29
2004	29	25	30	24	19	23	21	28	28	28	28	29
2005	31	24	29	20	19	21	22	23	22	22	27	27

हल:

ऋतनिष्ठ विचरण सूचकांकों की गणना

निर्यात (करोड़ रु.)

माह	2001	2002	2003	2004	2005	5 वर्षो का योग	मासिक माध्य	आवर्त विचरण सूचकांक
जनवरी	28	33	29	29	31	150	30	120
फरवरी	20	25	26	25	24	120	24	96
मार्च	30	25	26	30	29	140	28	112

अप्रैल	20	18	23	24	20	105	21	84
मई	19	20	18	19	19	95	19	76
जून	23	20	23	23	21	110	22	88
जुलाई	24	22	26	21	22	115	23	92
अगस्त	27	29	30	28	24	140	28	112
सितम्बर	26	22	26	28	23	125	25	100
अक्तूबर	19	23	23	28	22	115	23	92
नवम्बर	30	26	29	28	27	140	28	112
दिसम्बर	28	32	29	29	27	145	29	116
					योग	1500	300	1200
					सामान्य माध्य	1500÷12|=125	300÷12|=25	1200÷12=100

आर्वत विचरण सूचकांक (जनवरी) $\frac{\text{जनवरी का माध्य X100}}{\text{सामान्य माध्य}}$ = 30 X 100÷25=120

इस प्रकार बाकी सब महीनों के आवर्त विचरण सूचकांक निकले गए हैं |

उदाहरण (Illustration) 2

निम्न समंको में, उपनति अनुपस्थित मानते हु ए, ऋतुनिष्ठ ज्ञात कीजिए:-

वर्ष		त्रैमासिक अवधि		
	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ
2002	74	82	66	70
2003	74	78	72	72
2004	80	82	66	62
2005	66	88	80	80

विभिन्न त्रैमासिक अवधियां के आवर्त विवरण सूचकांक (seasonal variation indices) का परिकलन कीजिय |

हल

विभिन्न त्रैमासिक अवधियों के माध्यों मेंअन्तर ऋतुनिष्ठा का द्योतक होगा | अत : त्रैमासिक औसत और त्रैमासिक विचरण सूचकांको का परिकलन किया जाता हैं |

त्रैमासिक माध्यों और त्रैमासिक विचरण सूचकांको की गणना

वर्ष	त्रैमासिक अवधि			
	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ
2002	74	82	66	70
2003	74	78	72	72
2004	80	82	66	62

2005	66	88	80	80
योग	294	330	284	284
त्रैमासिक माध्य	73.5	82.5	71	71
विचरण आवर्त सूचकांक	(73.÷74.5)X100 =98.66	(82.5÷74.5)X100 =110.74	(71.5÷74.5)x100 =95.30	(71÷74.5)x100 =95.30

सामान्य माध्य $= \frac{73.5+82.5+71+71}{4}$ =74.5

आवर्त (त्रैमासिक) सूचकांक$=\frac{\text{त्रैमासिक माध्य}}{\text{सामान्य माध्य}}$ X=74.5

प्रथम तिमाही का सूचकांक $= \frac{73.5}{74.5} X100$

=98.66

सभी त्रैमासिक सूचकांको की गणना सारणी की अन्तिम पंक्ति में दिखाई गई है । तीसरे व चौथे तिमाहियों के माध्य समान है शेष में अन्तर है अत: उक्त काल श्रेणी में कुछ मात्रा में आवर्त विचरण मौजूद है ।

चलमाध्य विधि (Moving Average Method) : 2

इस विधि से मौसमी निर्देशांको को ज्ञात करने के लिए मूल समंको के चलमाध्य निकालतेहै । यदि मूल समंक मासिक है तो बारह मासिक चलमाध्य और यदि त्रैमासिक ऋतुओ के समंक ज्ञात हो तो चार त्रैमासिक चल माध्य निकालते है । इस विधि के प्रमुख पद निम्न है ।

1. सबसे पहले मूल समंको का आर्वत योग ज्ञात करते है । उसे केन्द्रित करते है । एवं उससे चल माध्य ज्ञात करते है ।
2. इन्हे मूल समंको मे से धटाकर अल्पकालीन विचलन ज्ञात करते है ।
3. एक तालिका अल्पकालीन विचलन की अलग से बनाकर समान अवधियों के अल्पकालिक विचलन को जोडकर उन विचलनो की संख्या से भाग देकर उनका माध्य आर्वत विचरण ज्ञात करते है ।
4. इसके बाद प्रत्येक ऋतु के अल्पकालीन विचरणो मे से माध्य आर्वत विचरण धटाकर अनियमित विचरण ज्ञात करते है ।
5. अनियमित या दैव उच्चावचन उपलब्ध हो जाते है इस प्रकार इस रीति से अनियमित विचरणों का भी पृक्करण हो जाता है स्पष्टीकरण के लिए निम्न उदाहरण से समझाते है ।

उदाहरण (Illustration): 3

निम्नलिखित ऑकडों से आर्वत विचरण निकालिए -

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत ऋतु
1	30	81	62	119

2	33	104	86	171
3	42	153	99	221
4	56	172	129	235
5	67	201	136	302

चल माध्यों द्वारा अल्पकालिक, ऋतुनिष्ठ व अनियमित उच्चावचनों का निर्धारण निम्न प्रकार से करते है ।

वर्ष	ऋतु	मूल आवर्त	आवर्त योग	केन्द्रित योग	त्रैमासिक चल माध्य	अल्प कालिक उच्चावचन	आवर्त विचरण माध्य	अनियमित उच्चावचन
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	ग्रीष्म	30						
	मानसून	81						
			292					
	शरद	62		587	587 ÷ 8=73	-11	-19	+8
			295					
	शीत	119		613	613 ÷ 8=77	+42	+68	-26
			318					
2	ग्रीष्म	33		660	83	-50	-75	-13
			342					
	मानसून	104		776	92	+12	+25	+25
			394					
	शरद	86		797	100	-14	-19	+5
			403					
	शीत	171		855	107	+64	+68	-4
			452					
3	ग्रीष्म	42		917	115	-73	-75	+2
			465					
	मानसून	153		980	123	+30	+25	+5
			515					
	शरद	99		1044	131	-32	-19	-13
			529					

	शीत	221		1077	135	+86	+68	+18
			548					
4	ग्रीष्म	56		1144	141	-85	-75	-10
			578					
	मानसून	172		1177	146	+26	+25	+1
			592					
	शरद	129		1195	149	-20	-19	-1
			603					
	शीत	235		1235	154	+81	+68	+13
			632					
5	ग्रीष्म	67		1271	159	-92	-75	-17
			639					
	मानसून	201		1345	168	+33	+25	+8
			706					
	शरद	136						
	शीत	302						

स्तम्भ 8 में प्रस्तुत आवर्त विचरण निम्नांकित आवर्त विचरण सारणी में संगणित किए गए है ।

माध्य आर्तव विचरणों की गणना

वर्ष	**त्रैमासिक अवधि**			
	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत
1	-	-	-11	42
2	-50	12	-14	42
3	-73	30	-32	64
4	-85	26	-20	81
5	-92	33	-	-
योग	-300	101	-77	273
मध्य आर्वत विचरण	-75	25	-19	68

(3) श्रृंखला मुल्यानुपात विधि:-

इस विधि के प्रयोग से भी हम मौसमी निर्देशाको का माप करते है । इस विधि के द्वारा हम आर्तव विचरण को श्रृंखला मुल्यानुपात से दर्शाते है । इस विधि के प्रमुख पद निम्न है ।

1. इस विधि मे निम्न समीकरण से प्रत्येक समंक का मुल्यानुपात ज्ञात करते है ।
   श्रृखंलामुल्यानुपात = चालू मूल्य / पिछला मूल्य X 100
2. इसके बाद इन मुल्यानुपात का माध्य ज्ञात करते लें
3. इन श्रृंखला मुल्यानुपात माध्यो को प्रथम अवधि के आधार(100) पर श्रृंखला सूचकांक में बदलते है ।
   श्रृंखला सूचकांक का निम्न सूत्र उपयोग में लेते है ।
   श्रृंखला सूचकांक = चालू ऋतु का श्रृंखला सूचकांक X प्रथम ऋतु का श्रृंखला सूचकांक ÷100
4. अन्तिम अवधि को आधार मानकर प्रथम अवधि का श्रृंखला सूचकांक निम्न सूत्र से निकालते है ।
   प्रथम ऋतु का संगणित श्रृंखला सूचकांक = अन्तिम ऋतु का श्रृंखला सूचकांक X प्रथम ऋतु का श्रृंखला सूचकांक ÷100
5. अब इस संगणित श्रृंखला सूचकांक और 100 के अन्तर को ऋतुओ (महीनो से, तिमाही अवधियॉ) की संख्या से भाग देते है एवं समायोजन अंक प्राप्त करते है ।
6. इस समयोजन अंक को समायोजित करके संशोधित श्रृंखला सूचकांक प्राप्त करे ।
7. प्रथम श्रृंखला सूचकांक 100 में कोई परिवर्तन नही होता है ।
8. दूसरी अवधि के श्रृंखला सूचकांक मे समायोजन अंक (+,-d) के बराबर समायोजित करते है ।
9. तीसरी अवधि मे यह अंक (+,2d) लेते है ।
10. चौथी अवधि में यह अंक (+,3d) लेते है |
11. यदि समायोजित अंक धनात्मक आता है तो इसे यहां संशोधन के लिए घटाते है
12. इस प्रकार संशोधित श्रृंखला सूचकांक प्राप्त होगा |
13. अब इन संशोधित श्रृंखला सूचकांक का मध्य ज्ञात करते है | एवं निम्न सूत्र से संशोधित आर्तव सूचकांक प्राप्त होगा |
    $$\text{संशोधित आर्तव सूचकांक} = \frac{\text{संशोधित श्रृंखला सूचकांक X 100}}{\text{संशोधित श्रृंखला सूचकांक का मध्य}}$$

इस सम्पूर्ण क्रिया विधि को यहां एक उदाहरण से स्पष्ट कर रहे है |

उदाहरण (Illustration) :4

निम्न संमकों से श्रृंखला मूल्यानुपात विधि द्वारा संशोधित आर्वत सूचकांक ज्ञात कीजिए|

त्रैमासिक समंक

तिमाही	2002	2003	2004	2005	2006
1	45	48	49	52	60
2	54	56	63	65	70
3	72	63	70	75	84
4	60	56	65	72	66

हल (Solution):

त्रैमासिक आर्वत विचरण सुक सूचकांक की गणना

(त्रैमासिक अवधि का श्रृंखला मूल्यानुपात)

वर्ष	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ
2002	-*	120	133	83
2003	80	117	113	89
2004	88	129	111	93
2005	80	125	115	96
2006	83	117	120	79
श्रृंखला मूल्यानुपात योग	331	608	592	440
श्रृंखला मूल्यानुपातों का माध्य	82.8	121.6	118.4	88
श्रृँखला सूचकांक	100	100X121.6 ÷100=121.6	121.6X118.4 ÷100=143.9	143.9X88÷100=126.6
संशोधित श्रृंखला सूचकांक	100	121.6-1.2=120.4	143.92.4=141.5	126.6-3.6=123
संशोधित आर्वत सूचकांक	82.5	99.3	116.7	101.5

* प्रथम पद का श्रृंखला मुल्यानुपात हमेशा अनुपस्थित रहता है । गणना नही करते है ।

4. चल माध्य अनुपात विधि

इस विधि से भी मौसमी विचरण ज्ञात करते है एवं इस विधि के प्रमुख पद निम्न है ।

(1) सर्वप्रथम मूल समंको का चल माध्य ज्ञात करते है ।

(2) इसके बाद निम्न सूत्र से चल माध्य अनुपात ज्ञात करते है:

$$\text{चल माध्य अनुपात} = \frac{\text{मूल संमक X 100}}{\text{चल माध्य}}$$

(3) इन्हें एक अलग तालिका में रखकर आर्वत विचरण सूचकांक ज्ञात करते है ।

(4) इसकी सम्पूर्ण विधि उदाहरण से स्पष्ट की जा रही है ।

उदाहरण (Illustration) : 5

चल माध्य अनुपात विधि द्वारा निम्न समंको से आर्वत सूचकाक ज्ञात कीजिए :-

त्रैमास	2002	2003	2004	2005	2006
ग्रीष्म	40	42	41	45	44
मानसून	35	37	35	36	38
शरद	38	39	38	36	38

शीत	40	38	42	41	42

हल **चल माध्य अनुपात विधि से आर्वत सूचकांक**

वर्ष	ऋतु	मूल समंक	चार ऋतु आवर्त योग	केन्द्रित योग	त्रैमासिक चल माध्य	चल माध्य सूचकांक	मैसमी सूचकांक
1	2	3	4	5	6	7	8
1	ग्रीष्म	40					
	मानसून	35					
			153				
	शरद	38		308	38.50	98.70	96.46
			155				
	शीत	40		312	39	102.56	102.23
			157				
2	ग्रीष्म	42		315	39.38	106.65	108.96
			158				
	मानसून	37		314	39.25	94.27	92.35
			156				
	शरद	39		311	38.88	100.31	96.46
			155				
	शीत	38		308	38.50	98.70	102.23
			153				
3	ग्रीष्म	41		305	38.12	107.56	108.96
			152				
	मानसून	35		308	38.50	90.91	92.35
			156				
	शरद	38		316	38.12	96.20	96.46
			160				
	शीत	42		321	40.12	104.69	102.23
			161				
4	ग्रीष्म	45		320	40	112.50	108.26
			159				
	मानसून	36		317	39.62	90.86	92.35
			158				
	शरद	36		315	39.38	91.42	96.46

			157				
	शीत	41		316	39.5	103.80	102.23
			159				
5	ग्रीष्म	44		320	40	110	108.96
			161				
	मानसून	38		323	40.38	94.11	92.35
			162				
	शरद	38					
	शीत	42					

विभिन्न त्रैमासिक अवधियों से सम्बन्धित चल माध्य अनुपातों के अंकगणितीय माध्य निम्न प्रकार से ज्ञात किए गये है (स्तम्भ 7 के लिये उपरोक्त सारणी के लिये) ।

मौसमी सूचकांक चल माध्य अनुपात विधि से--

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	शरद	शीत ऋतु
2002	.-	.-	98.70	102.56
2003	106.25	94.27	100.31	98.70
2004	107.56	90.91	96.20	10469
2005	112.50	90.86	91.42	103.80
2006	110.00	94.11	_	_
योग	436.71	370.15	386.63	409.75
माध्य	109.18	92.54	96.66	102.44
मौसमी सूचकांक	108.96	92.35	96.46	102.23

मध्यों का योग = 109.18 +92.54+98.66+102.44 = 400.82 है जबकि यह 400 होना चाहिए । अत: आवर्त सूचकाक ज्ञात करने के लिए इन्हें 400/400.82=0.99795 से गुणा करेंगे ताकि इनका योग 400 हो जाये ।

109.18 X	.99795=	108.96
92.54 X	.99795=	92.35
96.66 X	.99795=	96.46
102.44 X	.99795=	102.23
		400.00

14.3 सारांश

काल श्रेणी में अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन प्रवृत्ति का ज्ञान हुआ है । काल श्रेणी मे अल्पकालीन प्रवृत्ति को मापने की विधियों को यहां विस्तार से चर्चा की गई है । अल्पकालीन प्रवृत्ति मे विभिन्न मौसमी, चक्रीय, आदि परिवर्तन होते है। इनको मापने की निम्न विधियां है ।

1. मौसमी माध्य विधि
2. चलमाध्य विधि
3. श्रृखंला मुल्यानुपात विधि
4. चल माध्य अनुपात विधि

14.4 शब्दावली

मौसमी निर्देशांकक (Seasonal Indices) : मौसमी परिवर्तनो को बताने के लिए प्रयुक्त निर्देशांक जिनसे मौसमी परिवर्तनो का ज्ञान होता है ।

मासिक आवर्त मध्य (Seasonal Average) : मासिक मूल्यों को जोडकर तथा उनकी संख्या से भाग देकर इन्हें प्राप्त किया जाता है ।

आवर्त विचरण निर्देशाक (Seasonal Variation Index) : इसे निम्न सूत्र से ज्ञात करते है ।

आवर्त विचरण निर्देशांक $=\frac{\text{आवर्त माध्य X 100}}{\text{सामान्य माध्य}}$

चल माध्य विधि (Moving Average Method) : अल्पकालीन प्रवृत्ति में होने वाले विचरणों का ज्ञान इस विधि से भी किया जा सकता है ।

मूल समंक (Original data) : काल श्रेणी मे ज्ञात मूल्यों को मूल समंक कहते है ।

14.5 स्व परख प्रश्न

1. अल्पकालीन मौसमी परिवर्तनो से आप क्या समझते है समझाइये ।
2. दीर्घकालीन प्रवृत्ति, मौसमी परिवर्तन तथा चक्रीय परिवर्तन मे अन्तर स्पष्ट कीजिए ।
3. निम्न आकंडो से मौसमी विचरण सूचकांकों का परिकलन कीजिए:

महीने	प्रथम	द्‌वितीय	तृतीय	चतुर्थ
जनवरी	18	20	22	24
फरवरी	20	22	19	24
मार्च	18	19	22	22
अप्रैल	17	18	18	20
मई	15	16	17	18
जून	16	20	18	22
जुलाई	17	24	24	25
अगस्त	19	23	25	26
सितम्बर	21	23	26	27
अक्टुबर	23	24	24	26
नवम्बर	23	24	25	27
दिसम्बर	24	26	27	28

1. निम्न समंको से उपनति अनुपस्थित मानते हुए त्रैमासिक विचरण सूचकांको की गणना कीजिए:-

त्रैमासिक अवधियॉ

वर्ष	प्रथम	द्‌वितीय	तृतीय	चतुर्थ
प्रथम	-	-	127	134
द्‌वितीय	120	120	118	128
तृतीय	130	122	122	132
चतुर्थ	127	118	-	-

5. निम्न समंको से चल माध्य अनुपात विधि द्‌वारा आवर्त सूचकांक ज्ञात कीजिए :-

त्रैमासिक अवधियॉ

वर्ष	प्रथम	द्‌वितीय	तृतीय	चतुर्थ
2004	68	62	61	63
2005	65	58	66	61
2006	68	63	63	67

6. निम्न समंको से श्रृंखला मूल्यानुपात विधि द्‌वारा आर्वत सूचकांको का परिकलन कीजिए:-

त्रैमासिक अवधियॉ

वर्ष	प्रथम	द्‌वितीय	तृतीय	चतुर्थ
2003	78	62	56	69
2004	84	64	61	84
2005	92	70	65	86
2006	98	71	72	95

इकाई-15

प्रायिकता - सरल घटनाएं

इकाई की रूपरेखा

15.1 उद्देश्य

15.2 परिचय

15.3 प्रायिकता सिद्धांत का विकास

15.4 प्रायिकता का अर्थ

15.5 प्रायिकता में प्रयुक्त शब्दावली

15.6 प्रायिकता की अवधारणाएं

15.7 सरल घटनाओं की प्रायिकता के उदाहरण

15.8 सारांश

15.9 स्वपरख प्रश्न

15.10 संदर्भ ग्रन्थ

15.1 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप-

1. प्रायिकता का अर्थ समझ सकेंगे ।
2. प्रायिकता के विकास में किन विद्वानों का योगदान है, जान सकेंगे ।
3. घटनाओं तथा उनके विभिन्न प्रकारों को जान सकेंगे ।
4. सरल घटनाओं की प्रायिकता की समस्याओं का परिकलन कर सकेंगे ।
5. प्रायिकता की तीन विभिन्न अवधारणाओं को समझ सकेंगे ।

15.2 परिचय (Introduction)

मनुष्य अनिश्चितता के वातावरण में रहता है | अतः भविष्य के प्रति आशंका को दूर करने के लिये कोई न कोई उपाय ढूंढना चाहता है । प्रायिकता से अनिश्चितता तो दूर नहीं की जा सकती लेकिन जोखिम की मात्रा की गणना की जा सकती है । प्रायिकता में कुछ ऐसे प्रश्न होते हैं जो जुएबाजी से सम्बन्धित हैं, जैसे ताश के पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया उसके हुक्म के इक्के होने की क्या संभावना है? ऐसे प्रश्नों को देखकर अनायास यह भ्रम होना स्वाभाविक है कि प्रायिकता के आधार पर जुएबाजी में जीता जा सकता है, अथवा कुछ प्राप्त किया जा सकता है । यहा यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि प्रायिकता किसी भी व्यक्ति को जिताने अथवा हराने में प्रत्यक्ष रूप से अपनी कोई भूमिका नहीं रखती । उदाहरण के लिये सिक्के को उछालने पर चित्त आने की संभावना 1 / 2 है इसका अर्थ है कि चित्त नहीं आने की संभावना भी 1 / 2 है । यदि आपका हित चित्त आने में निहित है तो प्रायिकता आपको बताती है कि 50 प्रतिशत परिस्थितियां आपके प्रतिकूल है । दूसरा उदाहरण लें, एक सर्जन के द्वारा

सफल ऑपरेशन की प्रायिकता 90 प्रतिशत है, यदि आमका अपना सम्बन्धी आपरेशन टेबल पर है तो क्या आप आश्वस्त होंगे? बिल्कुल नहीं, बल्कि आप सोचेंगे कि हमारा सम्बन्धी कहीं दस प्रतिशत में न आ जाये । लेकिन दो सर्जनों मे से चुनाव करना हो ए सर्जन के सफल ऑपरेशन करने की प्रायिकता 80 प्रतिशत हो तथा बी सर्जन के द्वारा सफल ऑपरेशन करने की प्रायिकता 90 प्रतिशत हो तब आप अपने निकटतम सम्बन्धी के लिये किस सर्जन को चुनेंगे ? अवश्य ही बी सर्जन को जिसके सफल ऑपरेशन करने की प्रायिकता अधिक है । दूसरे शब्दों में बी सर्जन से ऑपरेशन कराने पर जोखिम 10 प्रतिशत है जबकि ए सर्जन से ऑपरेशन कराने पर जोखिम 20 प्रतिशत है । मनुष्य सामान्यता जोखिम लेना पसंद नहीं करता । अत: यह स्पष्ट है कि आपका सम्बन्धी बी सर्जन के हाथों में भी पूरी तरह सुरक्षित नहीं है क्योंकि सफल ऑपरेशन की गारंटी कौन दे सकता है |

15.3 प्रायिकता सिद्धांत का विकास

सत्रहवीं शताब्दी में जेकब वर्नोली, अब्राहम मौरे तथा अठारहवीं शताब्दी में टॉमस ने तथा जोजफ लेगरेंज ने प्रायिकता को औपचारिक रूप से विकसित किया तथा उन्नीसवीं शताब्दी के गणितज्ञ पायर साइमन तथा मार्किस लेपलेस ने प्रायिकता से सम्बन्धित विचारों को एकत्रित तथा सूत्रबद्ध करने में सहायता की । आधुनिक काल में जोखिम का मापन करने में तथा अनिश्चितता की स्थिति को समझने में प्रायिकता का प्रचुर मात्रा में प्रयोग किया जाने लगा है ।

15.4 प्रायिकता का अर्थ

भविष्य में होने वाली किसी घटना के घटने की अनुकूल परिस्थितियों का कुल परिस्थितियों से अनुपात ही प्रायिकता है । प्रायिकता की गणना परिमाणात्मक रूप में की जाती है । परिस्थितियों की गणना दैव प्रयोग पर आधारित होती है । प्रायिकता शून्य से 1 के मध्य ही हो सकती है । असंभव घटनाओं की प्रायिकता शून्य तथा अवश्य भावी (निश्चित घटनाओं) की प्रायिकता 1.0 होती है । प्रायिकता ऋणात्मक नहीं हो सकती ।

प्रायिकता परिकलन करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते है -

घटना E घटने की प्रासिकता = $\frac{\text{अनुकुल परिस्थितियां}}{\text{कुल परिस्थितियां}}$

घटना E घटने की प्रासिकता P(E) = $\frac{\text{प्रतिकल परिस्थितियां}}{\text{कुल परिस्थितियां}}$

तथा P (E) + P(E) = 1

इस प्रकार यदि हम घटना E की प्रायिकता P(E) जानते है तो पूरक घटना P (E) का परिकलन उपर्युक्त सूत्र से कर कते हैं ।

15.4.1 संयोगानुपात तथा प्रायिकता (Odds and Probability):

कभी-कभी प्रायिकता को अभिव्यक्त करने के लिये संयोगानुपातों का प्रयोग भी किया जाता है । संयोगानुपात जब पक्ष में होते हैं तब इन्हे अनुकूल परिस्थितियां - प्रतिकूल परिस्थितियों के रूप में लिखते है जैसे-ताश की गड्डी में इक्के के पक्ष में संयोगानुपात 4:48 होंगे । ईंट के पत्ते के पक्ष में संयोगानुपात 13:39 होंगे । इसके विपरीत इक्के के विपक्ष में संयोगानुपात 48:4 तथा ईट के पत्ते के विपक्ष में संयोगानुपात 39:13 होंगे । संयोगानुपात के

आधार पर प्राथमिकता तथा प्रायिकता के आधार पर संयोगानुपात की गणना करना बहुत सरल है तथा दोनो ही तरीके प्रायिकता को अभिव्यक्त करने के लिये काम में लिये जाते हैं ।

15.5 प्रायिकता में प्रयुक्त शब्दावली

प्रायिकता का अध्ययन करते समय आपको निम्नलिखित शब्दों से परिचय प्राप्त कर लेना आवश्यक है |

15.5.1 दैव प्रयोग (Random Experiment)

प्रयोग ऐसी प्रक्रिया है जो घटनाओं को जन्म देती है । सिक्के को उछालने पर दोनों परिस्थितियां चित तथा पट दो पृथक सरल घटनाएं है । इस प्रकार सिक्के को उछालना एक प्रयोग है ।

एक ऐसा प्रयोग जिसकी समस्त संभावित परिस्थितियों का पहले से ज्ञान होता है लेकिन किसी विशिष्ट परिस्थिति का पहले से निश्चितता के साथ अनुमान लगाना संभव न हो, उसे दैव प्रयोग कहते हैं । उदाहरण के लिये एक छ: फलक वाले पासे को उछालने पर यह ज्ञात होता है कि 1,2,3,4,5 अथवा 6 में से ही कोई साइड आयेगी लेकिन अगली बार कौन सी साइड आयेगी यह निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता ।

15.5.2 प्रतिदर्श अन्तराल (Sample Space)

एक प्रयोग की समस्त संभावित परिस्थितियों को प्रतिदर्श अन्तराल कहते है । जैसे एक सिक्का उछालने पर H,T एक प्रतिदर्श अंतराल का उदाहरण है । इसी प्रकार पासा उछालने पर 1,2,3,4,5,6 भी एक प्रतिदर्श अंतराल का उदाहरण है । यदि एक ताश की गड्डी की बात करें तो ताश के सभी 52 पत्ते जैसे हुकुम, ईट, चिड़ी तथा पान के A,K,Q,J,10,9........2 भी प्रतिदर्श अंतराल का उदाहरण हैं । प्रतिदर्श अंतराल की प्रत्येक परिस्थिति को प्रतिदर्श बिन्दु (Sample Point) कहते हैं ।

15.5.3 घटना (Event)

किसी प्रतिदर्श अंतराल के उपसमुच्चय को जिसमें एक अथवा अधिक प्रतिदर्श बिन्दु विद्‌यमान होते हैं तथा जो किसी दैव प्रयोग से सम्बन्धित होती है, को घटना कहते हैं । यदि पासे का उदाहरण पुन: लें तथा सम संख्या को सफलता माने तो वास्तव में एक घटना का उदाहरण है जिसमें क्रमश: 2,4 तथा 6 तीन प्रतिदर्श बिन्दु हैं तथा जो समस्त संभव परिस्थितियों का एक भाग है । यह पुन: स्पष्ट कर देना उचित होगा कि एक घटना में एक अथवा अधिक प्रतिदर्श बिन्दु हो सकते हैं जबकि सिक्के को उछालने पर चित्त (Head) एक प्रतिदर्श बिन्दु भी है तथा एक घटना भी है ।

15.5.4 घटनाओं के प्रकार (Types of Events)

(1) **सरल घटना (Simple Event):** एक ऐसी घटना जिसमें केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु होता है सरल अथवा प्रारंभिक घटना कहलाती है ।

(2) **संयुक्त घटना (Compound Event):** जिस घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु होते हैं उन्हें संयुक्त घटना कहते हैं । दूसरे शब्दो में कई सरल घटनाओं को एक साथ मिलाने पर संयुक्त घटना बन जाती है |

(3) सम संभाव्य घटनाएं (Equally Likely Events): जब किसी घटना के घटने की संभावना किसी अन्य घटना के समान हो, तब उस घटना को सम संभाव्य घटना कहते हैं । यदि एक सिक्का समानरूप से चित्त अथवा पट गिरता हो तो घटनाएं सम संभाव्य हैं । इसके विपरीत यदि सिक्का उछालने पर अधिकतर चित्त गिरता हो तो ऐसी स्थिति में घटनाओं को सम संभाव्य नहीं कहा जा सकता ।

(4) स्वतंत्र घटनाए (Independent Events): जब किसी घटना के घटने से अन्य घटना अप्रभावित रहती है तो घटनाएं स्वतंत्र कही जाती हैं । जैसे पहली बार सिक्के की उछाल का दूसरी बार सिक्के की उछाल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता । अत: यह स्वतंत्र घटनाएं हैं । यदि एक ताश की गडडी में से एक पत्ता निकाला और उसे देखकर दूसरी बार निकालने से पहले वापिस गडडी में मिला दिया । यह प्रतिस्थापन (Replacement) कहलाता है । इस कारण दूसरी घटना पहली घटना से प्रभावित नहीं हुई । अत यह भी एक स्वतंत्र घटना का उदाहरण है ।

आश्रित घटनाए (Dependent Events) : यदि एक घटना का होना दूसरी घटना के घटने को प्रभावित करता है तब घटनाएं आश्रित घटनाएं कहलाती हैं । उपर्युक्त ताश की गड्डी के उदाहरण में पहली बार निकाला गया पत्ता प्रतिस्थापित नहीं किया जाता तब यह आश्रित घटना का उदाहरण होगा ।

(5) परस्पर अपवर्जी घटनाएं (Mutually Exclusive Events') - यदि किसी घटना की उपस्थिति किसी अन्य घटना के घटने में बाधक होती है, तब घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती है । दूसरे शब्दों में जब दो अथवा अधिक घटनाओं के प्रतिदर्श बिन्दु अलग-अलग हो तथा उनमें से एक भी बिन्दु एक समान न हो । उदाहरण के लिये ताश की गड्डी में से हुकुम तथा पान का पत्ता निकाले जानी वाली घटनाएं परस्पर अपवर्जी हैं क्योंकि पान के 13 पत्ते तथा हुकुम के 13 पत्ते अलग-अलग होते है अर्थात दोनों समूह पूरी तरह पृथक है तथा कोई ऐसा पत्ता नहीं होता जो दोनों समूहों में विद्यमान हो अत: यह परस्पर अपवर्जी घटना का उदाहरण है । जब एक ही गुण के आधार पर समूह के दो अथवा अधिक भागो में वितरित किया जाता है, तब उपसमूहों में सम्मिलित तत्व एक दूसरे से पूरी तरह अलग होते है तथा घटनाएं परस्पर अपवर्जी कही जाती हैं । दूसरी ओर दो गुणों के आधार पर बांटे गये समूहों में कुछ ऐसे तत्व हो सकते है जो दोनों समूहों में सम्मिलित हो, तब घटनाएं परस्पर अपवर्जी नहीं होती । जैसे आर्थिक परिस्थिति तथा आयु दो अलग-अलग गुणों के आधार पर वितरित समूहों में कुछ व्यक्ति दोनों वर्गो में सम्मिलित हो सकते है । ऐसी घटनाएं परस्पर अपवर्जी नहीं कहलाती । उदाहरण के लिये पान का पत्ता अथवा बादशाह ऐसी घटनाओं का उदाहरण है जो परस्पर अपवर्जी नही है । क्योंकि पान के 13 पत्ते तथा 4 बादशाह देखने में 17 पत्ते लगते है लेकिन वास्तव में है केवल 16 पत्ते क्योंकि पान का बादशाह दोनों समूहों में सम्मिलित होता है।

सम्पूर्ण घटनाएं (Exhaustive Events) : यदि प्रतिदर्श अंतराल की समस्त परिस्थितियों को सम्मिलित रूप से एक घटना के रूप में व्यक्त करें तो इन्हें सम्पूर्ण घटना कहा जायेगा जिसकी प्रायिकता 1.0 अथवा शत प्रतिशत होती है ।

15.6 प्रायिकता की अवधारणाएं

प्रायिकता की गणना करने से पूर्व प्रायिकता की तीन प्रकार की अवधारणाओं अथवा प्रायिकता के प्रकारों को समझना आवश्यक है । गणना करते समय प्रायिकता की किस अवधारणा का प्रयोग किया गया है, इसके आधार पर प्रायिकता का परिकलन बदल जाता है । प्रायिकता की तीन अवधारणाएँ निम्न प्रकार हैं -

(1) प्रतिष्ठित अवधारणा (Classical Approach)

(2) सापेक्षिक आवृत्ति अवधारणा (Relative Frequency Approach)

(3) व्यक्तिपरक अवधारणा (Subjective Approach)

प्रायिकता की प्रतिष्ठित अवधारणा तथा सापेक्षिक आवृत्ति अवधारणा को सम्मिलित रूप से वस्तुपरक अवधारणा कहा जा सकता है ।

उपर्युक्त तीन अवधारणाओं का क्रमश: वर्णन निम्न प्रकार है -

15.6.1 प्रतिष्ठित अवधारणा (Classical Approach of Probaility): प्रायिकता की प्रतिष्ठित अवधारणा सम संभाव्य (Equally Likely) की मान्यता पर आधारित है । इसमें यह माना जाता है कि संभावित परिस्थितियां (प्रतिदर्श बिन्दु) सभी के आने की प्रायिकता समान है । अत: किसी एक घटना की प्रायिकता उस घटना से सम्बन्धित परिस्थितियों का कुल परिस्थितियो से अनुपात है । उदाहरण के लिये ताश के 52 पत्तो में से प्रत्येक पत्ते के देवयोग से निकलने की प्रायिकता 1/52 है, अत: पान के इक्के के निकलने की प्रायिकता भी वही है जो कि हुकुम की दुक्की की निकलने की प्रायिकता सामान्यतया प्रायिकता की गणना का आधार प्रतिष्ठित अवधारणा की इस मान्यता पर आधारित है कि प्रत्येक सरल घटना की प्रायिकता समान होती है तथा संयुक्त घटना की प्रायिकता भी इसी मान्यता के आधार पर ज्ञात की जा सकती है । यदि यह प्रायिकता ज्ञात करनी हो कि 52 ताश के पत्तों में से याद्दच्छिक रूप से निकाला गया पत्ता बादशाह होगा । ताश के पत्तों में कुल चार बादशाह होते है । प्रत्येक बादशाह की प्रायिकता 1/52 है अत: बादशाह आने की प्रायिकता 4/52 होगी । इसे प्रायिकता के निम्नलिखित सूत्र से भी ज्ञात कर सकते हैं -

$$P\ (E) = \frac{\text{घटना E से सम्बन्धित अनुकूल परिस्थितियों की संख्या}}{\text{कुल परिस्थितियों की संख्या}}$$

उदाहरण - एक अच्छी तरह मिली हुई मानक ताश की गड्डी में से एक पत्ता याद्दच्छिक रूप से निकाला गया, उसके चिड़ी का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

उत्तर - कुल चिड़ी के पत्ते 13 होतें है जबकि मानक ताश की गड्डी में (जोकरों को हटाकर) 52 पत्ते होते हैं अत: वांछित प्रायिकता 4/52= 1/13 होगी ।

उदाहरण - एक पासे को उछालने पर सम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

उत्तर - पासे में कुल छ: स्थितियां होती हैं ।

1,2,3,4,5 तथा 6 इनमें से सम संख्या क्रमश 2,4 तथा 6 है । अत: वांछित प्रायिकता 3 / 6= 1/2 होगी ।

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट हो गया है कि -

1. प्रायिकता केवल मात्र एक अनुपात है ।

2. घटना के पक्ष में परिस्थितियों का कुल परिस्थितियो से अनुपात का वास्तविक घटना घटने से कोई सम्बन्ध नही होता है ।
3. प्रायिकता का विस्तार '0' (शून्य) से लेकर '1' तक होता है । प्रायिकता कभी- (ऋणात्मक) नहीं हो सकती ।

चेतावनी : आप समझ सकते है कि टी वी में दिखाये जा रहे इनामी कार्यक्रम जनता को कितने भुलावे मे डालने वाले हैं । इनाम एक तथा खेलने वाले एक करोड़ । इनाम जीतने की प्रायिकता 1 /100,00,000 तथा एसएमएस से कमाई करोड़ों में ।

15.7 सरल घटनाओं की प्रायिकता के उदाहरण

Example 15.1

एक पासा फेंकने पर 5,6 आने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

Solution:

पासे में 6 साइड होती हैं जिनमे से 5,6 वाली 2 साइड होती हैं ।

प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूलपरिस्थितियां}}{\text{कुल परिस्थितियां}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Example 15.2 दो पासे एक साथ फेंकने पर 8 का योग आने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

Solution: दो पासे एक साथ फेंकने पर कुल 36 परिस्थितियां निम्न प्रकार हो सकती हैं --

प्रथम पासा / द्वितीय पासा	1	2	3	4	5	6
1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

इस प्रकार 36 में से पांच परिस्थितियों में (2,6)(3,5)(4,4)(5,3) तथा (6,2) घटनाओं का कुल योग 8 होगा ।

अत: प्रायिकता $= \frac{5}{36}$

Example 15.3

दो पाँसे एक साथ फेंकने पर योग 11 से कम होने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

Solution: इस प्रश्न में प्रायिकता पूरक घटना के रूप में ज्ञात करना उचित होगा ।

पूरक घटना की प्रायिकता = 1- घटना घटने की प्रायिकता

$= 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$

Example 15.4

एक थैले में 5 लाल तथा 7 हरी गेंदें है । एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है इस गेंद का रंग लाल होगा इसकी क्या संभावना है ।

Solution: P (Red Ball) = $\frac{No.of\ red\ Balls}{\text{Total No.of Balls}}$

$= \frac{5}{12}$

Example 15.5

एक थैले में 5 लाल तथा 7 हरी गेंदे है । दो गेंदे एक साथ यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि दोनों गेंदे लाल रंग की होगी ।

Solution: P (Red Ball) = $\frac{5_{c_2}}{12_{c_2}} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$

जब एक से अधिक गेंदें निकाली जाती है तब गणना की तकनीक संचय (Combinations) का प्रयोग करना पड़ता है। n वस्तुओं में से r का चयन करने पर संचयों की संख्या

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$5_{c2} = \frac{5!}{(5-2)!2!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times} = 10$$

इसी प्रकार $12_{c_2} = \frac{12!}{(12-2)!2!} = \frac{12!}{12!2!} = \frac{12\times11}{2\times1} = 66$

Example 15.6

एक थैले में 5 लाल तथा 7 हरी गेंदे है । तीन गेंदे एक साथ यादृच्छिक रूप से निकाली जाती हैं प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि तीनो गेंदे लाल रंग की होंगी ।

Solution: P (Red Ball) $\frac{5_{c3}}{12_{c3}} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

टिप्पणी - आप ध्यान दें कि अंश में सदैव 5 लाल तथा हर में 12 गेंदों से बनने वाले संचय की गणना करनी है, फिर चाहे 1 गेंद निकाली जाती है, 2 गेंद एक साथ निकाली जाती है अथवा अधिक । प्रश्न में जब केवल 1 गेंद निकालने के लिये कहा गया था, तब भी संचय का प्रयोग किया जा सकता था ।

हम $\frac{5}{12}$ के स्थान पर $\frac{5_{c_1}}{12_{c_1}}$ भी लिख सकते हैं ।

Example15.7

ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि यह पत्ता हुकुम का इक्का होगा ।

Solution: P (हुकुम का इक्का) $=\frac{1}{52}$

Example 15.8

ताश की गड्डी में से 2 पत्ते एक साथ निकाले जाते हैं । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि दोनों एक इक्के होंगे ।

Solution: कुल 4 पत्तों में से 2 इक्के निकलने के तरीके $=4_{c_2}$

कुल 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकलने के तरीके $=52_{c_2}$

$$=\frac{4_{c_2}}{52_{c_2}}$$

$$=\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{52\times51}{2\times1}}$$

$$L=0.0045$$

Example 15.9

मुदित को जॉब मिलने के पक्ष में संयोगानुपात 9:4 हैं । मुदित को जॉब मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये । मुदित को जॉब नही मिलने की प्रायिकता भी ज्ञात करें ।

Solution: मुदित को जॉब मिलने की प्रायिकता=P (J) = $\frac{9}{9+4}=\frac{4}{13}$

मुदित को जॉब नहीं मिलने की प्रायिकता = $1-\frac{9}{13}=\frac{4}{13}$

Example 15.10

महेश के अगले 40 वर्ष तक जीने की प्रायिकता $\frac{9}{10}$ है । महेश के अगले 40 वर्ष जीवित रहने के पक्ष में संयोगानुपात तथा द्विपक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिये ।

Solution: महेश के अगले 40 वर्ष तक नहीं जीने की प्रायिकता

P (Not Live) $1-\frac{9}{13}=\frac{1}{10}$

अत: पक्ष में संयोगानुपात $=\frac{9}{10}:\frac{1}{10}:9:1$

विपक्ष में संयोगानुपात $=\frac{1}{10}:\frac{9}{10}:1:9$

Example 15.11

एक लीप वर्ष में 53 शुक्रवार होने की प्रायिकता ज्ञात करें |

Solution: लीप वर्ष में' फरवरी 29 की होती है । अत: वर्ष में 365+1=368 दिन होते है । सप्ताह की संख्या $\frac{366}{7}$ = 52 सप्ताह तथा 2 दिन शेष

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि 52 सप्ताह में 52 शुक्रवार तो होंगे ही, अब प्रश्न उठता है कि शेष बचे 2 दिन क्या-क्या हो सकते हैं । यहां पर शेष 2 दिन के सभी विकल्पों पर विचार करेंगे ।-

1	सोमवार, मंगलवार
2	मंगलवार, बुधवार
3	बुधवार, गुरुवार
4	गुरुवार, शुक्रवार
5	शुक्रवार, शनिवार
6	शनिवार, रविवार

इस प्रकार 7 में से दो परिस्थितियां (गुरूवार के साथ शुक्रवार तथा शनिवार के साथ शुक्रवार) पक्ष में हैं अत:

-- $P(53 Fridays) = \frac{2}{7}$

15.6.2 प्रायिकता की सापेक्षिक आवृति अवधारणा (Relative Frequency Approach of Probability): प्रायिकता की प्रतिष्ठित अवधारणा समस्त संभव परिस्थितियों को समसंभाव्य मानने की मान्यता पर आधारित है । उदाहरण के लिये एक सिक्का चित्र आयेगा इसकी प्रायिकता 1/2 इसकी मान्यता पर आधारित है कि सिक्के में चित अथवा पट दोनों पक्षों के आने की संभावना समान है । लेकिन आधुनिक विचारधारा में इसे ठीक नहीं माना गया है । हम चित्त अथवा पट का खेल खेलते समय यह भी चाहेंगे कि सिक्के को परखें । यदि एक सिक्का 10 उछालो में 8 बार चित आता है तो हमें समसंभाव्य की मान्यता को नकारना होगा । प्रायिकता की सापेक्षिक आवृत्ति अवधारणा प्रयोग पर आधारित है । दिये गये उदाहरण में सिक्के के चित आने की प्रायिकता सापेक्षिक आवृत्ति अवधारणा के आधार पर 0.8 है न कि 0.5; लेकिन इससे पूर्व तथा इसके पश्चात् भी जितने प्रश्न आप हल करेंगे. उन्हे सामान्यतया प्रतिष्ठित अवधारणा के आधार पर ही हल कर पायेंगे । इसका कारण स्पष्ट है किसी सैद्धांतिक परीक्षा में अथवा पुस्तक के प्रश्न का हल करते समय आप कैसे प्रयोग कर पायेंगे तथा प्रयोग पर आधारित उत्तर भी अलग-अलग अध्ययनार्थी के भिन्न-भिन्न होंगे । अत: परीक्षा के लिये यह विधि व्यावहारिक नही है । केवल उन परिस्थितियों को छोड़कर जबकि आपको किसी प्रयोग के परिणाम दे दिये जायें तथा उसके आधार पर प्रायिकता का परिकलन कराया जाये ।

15.6.3 प्रायिकता की व्यक्तिपरक अवधारणा (Subjective Approach of Probability):

प्रायिकता की व्यक्तिपरक अवधारणा में उपलब्ध सूचवना, व्यक्तिगत समझ तथा सोच का बहुत बड़ा योगदान है । यही कारण है कि प्रायिकता के अनुमान दो व्यक्तियों के लिए समान नहीं होते । यह अवधारणा सैद्वांतिक है । एक व्यक्ति कहता है कि आज संध्याकाल वर्षा होने की संभावना 90 प्रतिशत है जबकि दूसरा व्यक्ति कहता है कि संभावना 25 प्रतिशत है । इसकी संभावना प्रश्न उठता है कि किस व्यक्ति के प्रायिकता सम्बन्धी अनुमानों को सही माना जाये । हम दोनो में से किसी को भी गलत नही कह सकते । बहुधा प्रबन्धकों को ऐसे वातावरण में निर्णय लेने पड़ते हैं जबकि न तो समस्त संभव परिस्थितियों का ज्ञान ही होता है तथा न ही

प्रयोग करने की सुविधा । मान लीजिये राष्ट्र के वित्त मंत्री को भविष्य में होने वाली प्राकृतिक आपदा जैसे अकाल, बाढ़, भूकम्प आदि के लिये बजट में व्यवस्था करनी है इसका अनुमान लगाना किसी के लिये भी संभव नही है, लेकिन वित्त मंत्री द्वारा इन असामान्य परिस्थितियों का अनुमान प्रायिकता की व्यक्तिपरक अवधारणा पर आधारित होगा । व्यवहारिक जीवन में प्रायिकता की व्यक्तिपरक अवधारणा का व्यापक प्रयोग किया जाता है लेकिन पुस्तको में इसके सैद्धांतिक पक्ष का ही वर्णन किया जाना संभव है ।

15.8 सारांश (Summary)

प्रायिकता सिद्धांत विभिन्न घटनाओं के घटने की संभावना का परिमाणात्मक माप प्रदान करता है । प्रायिकता देव प्रयोग पर आधारित होती है जिसका मान शून्य से 1.00 के मध्य ही हो सकता है । किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के लिये उस घटना की पक्ष में परिस्थितियो का कुल परिस्थितियों से भाग लगाते हैं । प्रायिकता किसी भी प्रकार की जीत का आश्वासन नही देती लेकिन प्रायिकता से किसी भी प्रतिस्पर्द्धा से किसी भी प्रतिस्पर्द्धा में जोखिम का अनुमान लगाया जा सकता है । प्रायिकता की तीन अवधारणाएं हैं - प्रतिष्ठित अवधारणा में घटना से सम्बन्धित समस्त परिस्थितियों को सम संभाव्य मान कर ही प्रायिकता का परिकलन कर दिया जाता है । प्रायिकता की सापेक्ष आवृत्ति अवधारणा प्रयोग पर आधारित है, इसमें पहले से यह मानकर नहीं चला जाता कि सभी परिस्थितियां समान हैं । यदि सिक्के को उछालने पर चित्त की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तब प्रतिष्ठित अवधारणा के आधार पर प्रायिकता 1/2 होगी लेकिन सापेक्षिक आवृत्ति अवधारणा की स्थिति में यदि सिक्का 100 बार उछलने पर 72 बार चित आता है तब प्रायिकता 72/100 = 0.72 होगी । प्रायिकता की तीसरी अवधारणा व्यक्तिपरक अवधारणा है इसमें व्यक्तिगत सोच तथा समझ के आधार पर प्रायिकता का आंकलन किया जाता है, यह आंकलन हरेक व्यक्ति के लिये अलग-अलग हो सकता है । इसका यह अर्थ नही है कि व्यक्तिपरक अवधारणा उपयोगी नही है । वस्तुत: किसी नवीन परिस्थिति में प्रबंधकीय निर्णयन में प्रायिकता की व्यक्तिपरक अवधारणा के आधार पर ही निर्णय लिये जा सकते हैं ।

15.9 स्वपरख प्रश्न (Self Assessment Questions)

व्यावहारिक प्रश्न-

1. एक सिक्का उछालने पर चित के पक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिये । Ans. 1:1)
2. एक पासा फेंकने पर विषम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी ? (Ans. $\frac{1}{2}$)
3. दो पासे एक साथ फेंकने पर 7 का योग आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये । (Ans. $\frac{1}{6}$)
4. दो पासे एक साथ फेंकने पर 8 का योग नही आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये ।
   (Ans. $1-\frac{5}{36}=\frac{31}{36}$)
5. एक थैले में 4 सफेद तथा 3 काली गेंदे है । यादृच्छिक रूप से 1 गेंद निकाली गई । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि यह गेंद सफेद होगी ।

(Ans. $\frac{4}{7}$)

6. एक थैले में 6 लाल तथा 5 हरी गेंदें हैं, दो गेंद एक साथ निकाली गई । दोनो का रंग हरा होगा इसकी क्या प्रायिकता है ?

(Ans. $\frac{5_{c_2}}{11_{c_2}}$)

7. एक थैले में 7 लाल तथा 3 पीली गेंदे हैं, तीन गेंद एक साथ निकाली गई । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि तीनो पीली गेंदें होंगी ।

(Ans. $\frac{3_{c_3}}{10_{c_3}}$)

8. ताश की गडडी में से याद छिक रूप से एक पत्ता निकाला गया । यह तस्वीर वाला पत्ता होगा, इसकी प्रायिकता ज्ञात करें ।

(Ans. $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$)

9. यादृच्छिक रूप से चुना गया एक वर्ष जो कि लीप वर्ष नहीं है, 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

(Ans. $\frac{1}{7}$)

(**संकेत -**एक ऐसा वर्ष-जो लीप वर्ष नहीं है उमसे फरवरी 28 की होती है तथा वर्ष में दिनों की संख्या 365 होती है । इस प्रकार 52 सप्ताह के बाद 1 दिन शेष रहता है, यह दिन रवि, सोम, मंगल, बुध, गुरू, शुक्र अथवा शनि में से कोई भी हो सकता है । हम चाहते हैं कि 53 रविवार; इसके लिये बचा हुआ दिन भी रविवार हो । अत वांछित प्रायिकता =)

सैद्धांतिक प्रश्न

1. प्रायिकता सिद्धांत में प्रयुक्त निम्न शब्दावली को समझाइये ।
   (1) प्रयत्न तथा घटना (2) सम संभाव्य घटनाएं
   (3) परस्पर अपवर्जन घटनाएं (4) स्वतंत्र तथा आश्रित घटनाएं
   (5) सरल तथा संयुक्त घटनाएं
2. प्रायिकता की अवधारणाओं पर विस्तृत टिप्पणी लिखिये ।

15.10 संदर्भ ग्रंथ

1. Levin & Rubin : Statistics for Management
2. शर्मा, जैन, पारीक : सांख्यिकीय विश्लेषण
3. कैलाश नाथ नागर : सांख्यिकी के मूल तत्व ।

इकाई- 16

प्रायिकता- संयुक्त घटनाएं

इकाई की रूपरेखा

16.1 उद्देश्य
16.2 परिचय
16.3 प्रायिकता का योगात्मक प्रमेय
16.4 प्रायिकता का गुणन प्रमेय
16.5 प्रतिबंधित प्रायिकता
16.6 प्रतिलोम प्रायिकता
16.7 महत्वपूर्ण उदाहरण
16.8 सारांश
16.9 स्वपरख प्रश्न
16.10 संदर्भ ग्रंथ

16.1 उद्देश्य (Objective)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि -

- प्रायिकता की योगात्मक प्रमेय तथा गुणन प्रमेय का अर्थ समझ सके ।
- प्रायिकता की योगात्मक प्रमेय तथा गुणन प्रमेय से सम्बन्धित व्यवहारिक प्रश्नों को हल कर सकें ।
- प्रतिलोम प्रायिकता की आवश्यकता बता सकें ।
- प्रतिबंधित प्रायिकता के व्यवहारिक प्रश्नों को हल कर सकें ।

16.2 परिचय

इससे पहले इकाई में आपने प्रायिकता सिद्धांत तथा सरल घटनाओ की प्रायिकता का अध्ययन किया है । इस अध्याय में आप संयुक्त घटनाओं के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे । संयुक्त घटनाओं की स्थिति में सामान्यतया ऐसे प्रश्नों का उत्तर देना पड़ता है, जैसे घटना A या B के घटने की प्रायिकता क्या होगी ? अथवा घटना A तथा B के घटने की प्रायिकता क्या होगी? उपर्युक्त दोनों प्रश्न प्रायिकता के योग तक प्रमेय तथा गुणन प्रमेय पर आधारित हैं ।

यदि कोई प्रतिबंध दे रखा हो तो प्रायिकता का परिकलन किस प्रकार करेंगे । क्या परिणाम के आधार पर पूर्व प्रायिकताओं को बदलना आवश्यक है, ऐसे सभी प्रश्नों का उत्तर इस इकाई में दिया गया है ।

16.3 प्रायिकता की योगात्मक प्रमेय (Addition Theorem of Probabiulity)

जब दो या दो से अधिक घटनाओं में से किसी एक अथवा अधिक के घटने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तब प्रायिकता के योगात्मक प्रमेय का प्रयोग किया जाता है । इसमें पक्षकार के जीतने की प्रायिकता अपेक्षाकृत अधिक हो जाती है । आइये आपको एक नये शब्दकोष से आपको परिचित करायें ।

Or = अथवा (या) = + = U

P (A U B)- = P (A) + P (B) - P (A∩B)

उदाहरण के लिये 1 से 50 तक 4 अथवा 5 का गुणाक होने की प्रायिकता क्या होगी ? यह प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात करेंगे ।

50 तक की संख्याओ में 4 से गुणित होने वाली संख्याएं 12 होंगी अत: P (4) $=\frac{12}{50}$ तथा 5 से गुणित 10 होने वाली संख्याएं 10 होंगी । अत: P (5)=$\frac{10}{50}$ लेकिन कुछ संख्याएं ऐसी भी हैं जो 4 से गुणित तथा 5 से गणित होने वाली दोनों संख्याओं में सम्मिलित हैं । ये संख्याएं क्रमश: 20 तथा 40 है, ये दोनों संख्याएं 4 से गुणित होने वाली 12 संख्याओ में तथा 5 से गुणित होने वाली 10 संख्याओ में सम्मिलित हैं । अत: उभय रूप से सम्मिलित संख्याओं की प्रायिकता P(4∩5) = 2/50 को P(4) तथा I (5) में से घटाना होगा ।

P (4 U 5) = P (4) +P (5) - P (4∩5)

16.3.1 परस्पर अपवर्जी घटनाओं की प्रायिकता (Probability of Mutually Exclusive Events)

कभी-कभी प्रायिकता की योगात्मक प्रमेय में घटनाएं इस प्रकार की होती हैं जिनमें उभय तत्व विद्यमान नहीं होता । जब किसी तथ्य को किसी एक गुण के आधार पर ही बांटा जाता है तब उनमें उभय तत्व विद्यमान नहीं होता है । जैसे ताश के 52 पत्तों को रंग के आधार पर बांटने पर उनमें उभय तत्व नहीं होता । यदि यह प्रायिकता ज्ञात करनी हो कि यादृच्छिक रूप से चुना गया पला पान का पला अथवा चिड़ी का पला होगा । इसमें कोई उभय तत्व नही है ।

ऐसी घटनाओं को परस्पर अपवर्जी घटनाएं कहते हैं तथा इनकी प्रायिकता की गणना करते समय कॉमन तत्व P(A;B)को घटाने की आवश्यकता नही होती । हम जानते है कि

P(A U B)=PP(A)+P(B) -P (A∩B)

अत: परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिये सूत्र केवल निम्नलिखित रह जायेगा ।

P(A U B)= P(A) + P(B)

यह पहले ही स्पष्ट किया जा चुका है कि जब किसी तथ्य को किसी एक गुण के आधार पर तथा उसी तथ्य को किसी दूसरे गुण के आधार पर बांटा जाता है तब प्रायिकता ज्ञात करने के लिये उसमें से उभय तत्व की प्रायिकता को घटाना पड़ता है । ऐसी घटनाएं परस्पर अपवर्जी नहीं होतीं । ताश के उदाहरण को ही ले तथा प्रायिकता ज्ञात करे कि यादृच्छिक रूप से निकाला गया

पला पान का पला अथवा इक्का होगा । यहां पर पान का पत्ता रंग है तथा इसका मूल्य । इसमें एक उभय तत्व है पान का इक्का जो निम्न चित्र. से स्पष्ट हो जायेगा---

	A	K	Q	J	....	2	योग
चिड़ी	✓0	0	0	0	0	0	13
पान	✓						
ईट	✓						
हुकुम	✓						
योग	4						

वास्तव में ताश की गड्डी में से पान के पत्ते तथा इक्के अलग कर दिये जाएं तो पान केर पत्ते 17 नही होंगे बल्कि मात्र 16 पत्ते ही होंगे । पान का इक्का दोनों जगह सम्मिलित है अत: प्रायिकता ज्ञात करते समय उभय-तत्त्व की प्रायिकता घटाना आवश्यक हो जाता है ।

P (पान का पत्ता) $= \frac{13}{52}$

P(A) $= \frac{4}{12}$

P (पान का पत्ता U A) $= \frac{1}{52}$

P (पान का पत्ता U A) $= \frac{13}{52}+\frac{4}{12}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$

सूत्र रूप में-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

यदि उभय तत्व नहीं है अर्थात् घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं तब

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

जब तीन घटनाएँ हों -

परस्पर अपवर्जी घटनाओं की प्रायिकता

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B)+P(C)$

घटनाएँ जब अपवर्जी नहीं होती तब

$P(A \cup B \cup C)$

$P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)$

$-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

16.4 प्रायिकता की गुणन प्रमेय (Multiplication Theorem of Probability)

जब हम चाहते हैं कि एक से अधिक घटनाएं एक साथ घटें तब प्रायिकता कम हो जाती है । वास्तव में प्रायिकता का गुणा करने पर प्रायिकता कम हो जाती है । उदाहरण के लिये यदि हम चाहते है कि पहली बार सिक्का चित आये तथा दूसरी बार भी चित्त आये । पहली बार चित

आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ दूसरी बार चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ अत: संयुक्त प्रायिकता P(A⋂ B)) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

गुणन प्रमेय में घटनाएं दो प्रकार की होती हैं -

16.4.1 आश्रित घटनाए (Dependent Events) : जब पहली घटना का प्रभाव दूसरी घटना के घटने पर पड़े तब ऐसी घटनाए आश्रित घटनाएं कहलाती है ।

P(A⋂ B) = P(A) $*$ P(B/A)

यहां P(A) घटना A घटने की सीमांत प्रायिकता है ।

P(B/A) यह घटना B की प्रतिबंधित प्रायिकता इस मान्यता पर आधारित है कि घटना A घट चुकी है । ताश के उदाहरण को लें यादृच्छिक रूप से एकएक करके क्रमश: दो पत्ते चुने जाते है, प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि पहला पत्ता पान का तथा दूसरा पत्ता चिड़ी का होगा जबकि पहली बार निकाला गया पत्ता वापिस नहीं रखा जाता ।

पहला पत्ता पान का होने की प्रायिकता यह एक सीमांत प्रायिकता है । P(पान) = $\frac{13}{52}$

दूसरा पत्ता चिड़ी का होने की प्रायिकता जबकि पहला पला कपास नही रखा गया है । यह माना जाता है कि पहला पला पान का निकल चुका है यह एक प्रतिबंधित प्रायिकता है । अब कुल शेष पत्ते 51 रह गये है । अत: P(चिड़ी/पान)

$\frac{13}{51}$

अत: संयुक्त प्रायिकता $=\frac{13}{52}\times\frac{13}{51}=\frac{13}{204}=0.064$

स्वतंत्र घटनाएं (Independent Event) : जब एक घटना के घटने का प्रभाव दूसरी घटना के घटने को प्रभावित नही करता तब घटनाएं स्वतंत्र कही जाती है ।

P (A⋂ B) = P (A) $*$ P (B)

यहां P(A) = घटना A की सीमांत प्रायिकता है ।

P(B) = घटना B की सीमांत प्रायिकता है ।

दूसरे शब्दों में जब किसी घटना की प्रतिबंधित प्रायिकता तथा उसकी सीमांत प्रायिकता समान हो तब घटनाएं स्वतंत्र कही जाती हैं अर्थात

यहां घटना A तथा B परस्पर स्वतंत्र होंगी ।

Example: एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है पहली बार चित, दूसरी बार पट तथा तीसरी बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

Solution: P(A⋂ B)- =--P(A) $*$ P(B)$*$P(C)

घटनाएं परस्पर स्वतंत्र है पूर्ववर्ती घटना का उत्तरवर्ती घटना पर प्रभाव नहीं है अत:

P(H∩T∩H)= $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Example: एक थेले में 4 लाल तथा 5 हरी गेंदें हैं । एक एक कर दो गेंदे यादृच्छिक रूप से निकाली गई । यदि पहली बार निकाली गई गेंद वापिस रख दी जाती है तब प्रायिकता ज्ञात करें।

1. पहली गेंद लाल तथा दूसरी गेंद हरी होगी ।
2. एक गेंद लाल तथा दूसरी गेंद हरी होगी ।

Solution: उपर्युक्त प्रश्न में पहली बार निकाली गई गेंद प्रतिस्थापित कर दी जाती है । अत: घटना स्वतंत्र है ।

$$P(R \cap G) = P(R) * P(G) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$$

एक गेंद लाल तथा दूसरी हरी : इसमें दो परिस्थितियां हो सकती हैं ।

पहली गेंद लाल तथा दूसरी हरी अथवा पहली गेंद हरी तथा दूसरी लाल ।

P(I R $\cap$ II G) या P(I G $\cap$ II R)

$$= \left(\frac{4}{9} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{5}{9} \times \frac{4}{9}\right) = \frac{40}{81}$$

टिप्पणी : यदि सामान्य रूप में देखा जाये तो दोनों प्रश्न एक जैसे लगते हैं लेकिन दोनों प्रश्नों को ध्यान से देखने पर अन्तर समझ में आ जायेगा ।

16.5 प्रतिबंधित प्रायिकता (Conditional Probability)

कभी - कभी प्रायिकता किसी दी गई परिस्थिति में ज्ञात करनी होती है तब उसे प्रतिबंधित प्रायिकता कहते हैं । उदाहरण के लिये यह ज्ञात है कि पत्ता पान का है तब इसके इक्का होने की प्रायिकता एक प्रतिबंधित प्रायिकता है ।

P(A/ पान) $= \frac{1}{13}$

प्रतिबंधित प्रायिकता की स्थिति में प्रतिदर्श अंतराल अपेक्षाक त छोटा हो जाता है । उपर्युक्त उदाहरण में चुनाव ताश की पूरी गड्डी में से न किया जाकर केवल पान के पलों तक सीमित रह गया है ।

P(A/B) = $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

P(A/B) = Probability of A given B प्रतिबंधित प्रायिकता है जबकि इसमें B प्रतिबंध है । उपर्युक्त उदाहरण में पान का पत्ता प्रतिबंध है ।

P (A/B) = प्रतिबंध की सीमांत प्रायिकता । उपर्युक्त उदाहरण में पाने के पत्ते की प्रायिकता = $\frac{13}{52}$

P (A$\cap$B) = संयुक्त प्रायिकता । इक्का या पान का पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}$

P (A/B) = $\frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}$

यदि P(B/A) अर्थात Probability of B given A ज्ञात करना हो तो सूत्र निम्न प्रकार होगा

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

व्यापक रूप में इसे निम्न प्रकार लिख सकते हैं -

$$\text{प्रतिबंधित प्रायिकता} = \frac{\text{संयुक्त प्रायिकता}}{\text{प्रतिबंध की सीमांत प्रायिकता}}$$

$$Conditional = \frac{Joint\ Probability}{Mariginal\ Probability of the condition}$$

Example: एक पाठ्यक्रम में छात्र निम्न प्रकार पंजीयन हैं -

	धनवान	**मध्यम वर्गीय**	**गरीब**	**योग**
ग्रामीण	100	500	400	1000
शहरी	200	2000	800	3000
योग	300	2500	1200	4000

प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि एक यादृच्छिक रूप से चुना गया छात्र

(1) ग्रामीण होगा ।

(2) मध्यम वर्गीय होगा ।

(3) ग्रामीण मध्यम वर्गीय होगा ।

(4) मध्यम वर्गीय होगा यदि यह ज्ञात है कि वह एक ग्रामीण है ।

(5) एक ग्रामीण होगा यदि यह ज्ञात है कि वह एक मध्यमवर्गीय है ।

Solution: उपर्युक्त प्रश्न में प्रथम दो प्रश्न (1) तथा (2) सीमांत प्रायिकता के है, इसमें दिये गये योग से ही प्रश्न का हल हो जायेगा ।

(1) P(ग्रामीण) $= \frac{\text{ग्रामीणों की संख्या}}{\text{कुल छात्रों की संख्या}}$

$= \frac{1000}{4000} = 0.25$

(2) P(मध्यमवर्गीय) $= \frac{2500}{4000} = 0.625$

(3) यह एक संयुक्त प्रायिकता का प्रश्न है क्योंकि यहां पर छात्र ग्रामीण हो तथा मध्यमवर्गीय भी हों, इसके लिये सारणी के अन्तर्गत दिये गये अन्य तत्व का कुल योग से सम्बन्ध स्थापित करना होगा-

P (ग्रामीण $\cap$ मध्यमवर्गीय) $= \frac{\text{ग्रामीण मध्यमवर्गीय छात्रों की संख्या}}{\text{कुल छात्रो की संख्या}}$

प्रश्न संख्या (4) तथा (5) प्रतिबंधित प्रायिकता से सम्बन्धित हैं । ऐसे प्रश्नों में केवल सारणी का सम्बन्धित हिस्सा ही प्रयोग में आता है ।

(4) P(मध्यमवर्गीया / ग्रामीण) $= \frac{\text{मध्यमवर्गीय} \cap \text{ग्रामीण}}{\text{कुल ग्रामीण}}$

$$= \frac{500}{1000} = 0.5$$

(5) ग्रामीणा / मध्यमवर्गीय) = $\frac{\text{मध्यमवर्गीय} \cap \text{ग्रामीण}}{\text{कुल मध्यमवर्गीय}}$

$$= \frac{500}{2500} = 0.5$$

16.6 प्रतिलोम प्रायिकता (Inverse Probability)

प्रायिकता ज्ञात करने के लिये यदि कुछ अतिरिक्त सूचना मिलती है तो इसके कारण प्रायिकता को बदलना आवश्यक हो जाता है । उदाहरण के लिये A तथा B दो थैले हैं, दोनो में कुछ गेंदे हैं, एक गेंद किसी थैले में से निकाली जाती है हम जानते है कि A थैला चुने जाने की प्रायिकता 1/2 है तथा B थैला चुने जाने की प्रायिकता भी 1/2 है । इसे पूर्व प्रायिकता कह सकते है । मान लीजिये A थैले में 7 लाल तथा 3 काली गेंदे है तथा B थैले में 4 लाल तथा 6 काली गेंदें है । एक बच्चे को किसी थैले में से एक गेंद लाने को कहा जाता है वह एक गेंद ले आता है तथा उसका रंग काला है । इसे परिणाम कह सकते है । अब प्रश्न उठता है कि क्या गेंद का रंग देखने के बाद भी आपको पूर्व बदलने की आवश्यकता नहीं है ? एक साधारण व्यक्ति भी बता सकता है कि यदि काली गेंद निकली है तो यह थैले A की अपेक्षा B में से होने की संभावना अधिक है क्योंकि काली गेंदे थैले B में अधिक है । इसे प्रतिलोम प्रायिकता कहते है क्योंकि परिणाम को देखकर कारण की प्रायिकता को बदला जाना आवश्यक है । बदली हुई प्रायिकता को पश्च प्रायिकता कहते है । इसका श्रेय टॉमस बे (1702- 1761) गणितज्ञ को जाता है । वास्तव में पश्च प्रायिकता की गणना के प्रतिबंधित प्रायिकता के निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है -

P(I bag given black ball)=

$$\frac{P(I\,bag).P(I\,black\,ball\ \ from\,I\,bag)}{P(I\,bag)P(I\,black\,ball\ \ from\,I\,bag)+P(I\,bag).P(Black\,ball\ \ from\,II\,bag)}$$

इसे संक्षिप्त रूपा में निम्न प्रकार लिख सकते है -

$$P(I/B)\frac{P(I).P(B/I)}{[P\left(I\right).P(B/I)]+[P(II).P(B/II)]}$$

उक्त सूत्र में P(I/B) पश्चात् प्रायिकता है तथाP(I) तथा P(II) पूर्व प्रायिकताएं हैं ।

Black Ball मिलना निकलना नयी सूचना है ।

$$p(I/B)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20}+\frac{6}{20}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{3}{20}\times\frac{20}{9}=\frac{1}{3}$$

टिप्पणी : -आप देख सकते हैं कि पहले थैले के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ काली गेंद की सूचना मिलने पर $\frac{1}{3}$ रह गयी

इस प्रकार दूसरे थैले की प्रायिकता भी बदल जायेगी ।

$$P\left(II/B\right)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}\right)}=\frac{\frac{6}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{2}{3}$$

Example: एक फैक्ट्री में पुर्जे बनाने की तीन मशीने A, B तथा C क्रमश: 40%, 25% तथा 35% पुर्जे बनाती है । उनके उत्पादन में क्रमश: 3%4% तथा 5% दूषित पुर्जो का उत्पादन होता है । यादृच्छिक रूप से एक पुर्जे का चयन करने पर इसे दूषित पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि यह दूषित मशीन C से था ।

Solution:

उपर्युक्त प्रश्न ब प्रमेय से सम्बन्धित है यहां पूर्व प्रायिकताएं A, B तथा C मशीन की निम्न प्रकार हैं-

$$P(A)=\frac{40}{100}=0.4$$

$$P(B)=\frac{25}{100}=0.25$$

$$P(C)=\frac{35}{100}=0.35$$

दूषित पुर्जा होने की प्रायिकता

$$P(Defective / Abag) = \frac{3}{100} = 0.03$$

$$P(Defective / Bbag) = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$P(Defective / Cbag) = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$P(Cbag / defective) =$$

$$\frac{P(C).P(D / C)}{P(A).P(D / A) + P(B)P(D / B) + P(C)P(D / C)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.05}{(0.4 \times 0.03) + (0.25 \times 0.04) + (0.35 \times 0.5)}$$

$$= \frac{0.0175}{0.0120 + 0.0100 + 0.0175}$$

$$= \frac{0.0175}{0.0395}$$

$$= 0.443$$

16.7 महत्वपूर्ण उदाहरण

Example:

एक सांख्यिकी की समस्या A, B तथा C तीन विद्यार्थियों को पृथक-पृथक दी जाती है । A के द्वारा समस्या का हल करने के पक्ष में संयोगानुपात 1:2 हैं, B के पक्ष में संयोगानुपात 2:5 हैं तथा C के विपक्ष में संयोगानुपात 5:3 हैं । निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिये.

1. A, B तथा C तीनों द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्या होगी ?
2. प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि केवल A ही समस्या का हल कर पायेगा ।
3. प्रायिकता ज्ञात कीजिये किकेवल C ही समस्या का हल नही कर पायेगा ।
4. प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि तीनो में से कोई दो ही समस्या का हल कर पायेंगे ।
5. प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि समस्या हल हो जायेगी ।
5. प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि समस्या हल हो जायेगी ।

(1) A के पक्ष में संयोगानुपात 1: 2

अत: P(A) $= \frac{1}{3}$

B के पक्ष में संयोगानुपात 1:2

अत: P(B) $= \frac{2}{7}$

C के विपक्ष में संयोगानुपात 5:3

अत:P(Not C) $=\frac{5}{8}$ तथा P(C) $=\frac{3}{8}$

तीनों द्‌वारा समस्या हल किये जाने की प्रायिकता जबकि घटनाएं स्वतंत्र है ।

P(A) P(B) P(C)

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{28}$$

(2) केवल A द्‌वारा ही समस्या हल करने का तात्पर्य है कि B तथा C समस्या का हल नहीं कर पायेंगे ।

$$P(A \cap \text{Not } B \cap \text{Not } C) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{168}$$

(3) केवल C ही समस्या का हल नही कर पायेगा अर्थात A तथा B समस्या का हल कर पायेंगे

$$P(A \cap B \cap \text{Not } C) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{84}$$

(4) केवल दो ही समस्या का हल कर पायेंगे, ऐसा निम्न तीन तरह से हो सकता है -

$P(A \bigcap B \bigcap \text{Not } C)$ या

$P(A \bigcap \text{Not } B \bigcap C)$ या

$P(\text{Not } A \bigcap B \bigcap C)$

उपर्युक्त तीनों स्थितियां परस्पर अपवर्जी हैं, तीनों प्रायिकताओ को जोड़कर वांछित प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है -

$P(A \cap B \cap \text{Not } C$ $\frac{5}{84}$ (इसका हल उपर्युक्त तीन में है)

$P(A \cap \text{Not } B \cap C) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{56}$

$P(\text{Not } A \cap B \cap C) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{46}$

अत: कोई दो समस्या का हल कर पायेंगे $=\frac{5}{84}+\frac{5}{56}+\frac{1}{14}=\frac{10+15+12}{168}$

$$=\frac{37}{168}$$

(5) समस्या हल हो जायेगी

यदि कोई एक समस्या का हल कर ले या

यदि कोई दो समस्या का हल कर ले या

यदि तीनो समस्या का हल कर ले

$P(A\cap \text{Not } B\cap C)$ + $P(\text{Not } A\cap B\cap C)$+ $P(\text{Not } A\cap B\cap C)$

$$= \frac{25}{168} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{8}\right)$$

$$= \frac{25}{168} + \frac{20}{168} + \frac{30}{168} = \frac{75}{168}$$

प्रायिकता कोई दो ही समस्या का हल कर ले = $\frac{37}{168}$

प्रायिकता तीनों ही समस्या का हल कर ले = $\frac{1}{28}$

अतः समस्या हल हो जायेगी की प्रासिकता = $= \frac{75}{168} + \frac{37}{168} + \frac{1}{168} = \frac{118}{168}$

=0.702

वैकल्पिक हल : उपर्युक्त प्रश्न का पूरक प्रायिकता के आधार पर निम्न प्रकार सीधे ही हल प्राप्त किया जा सकता है :-

यदि कोई भी समस्या हल नही कर पायेगा की प्रायिकता को 1.0 में से घटाकर पूरक प्रायिकता ज्ञात कर ले तो हमें अभीष्ट उत्तर सीधे ही प्राप्त हो जायेगा ।

1 - P(Not A $\cap$ Not B $\cap$ Not C)

1-- $1 - \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{8} = -\frac{50}{168} = \frac{118}{168}$

= 0.702

Example: अरूण 80 प्रतिशत अवस्थाओं में सत्य बोलता हैं, वरूण 90 प्रतिशत अवस्थाओं में सत्य बोलता है । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि एक तथ्य का वर्णन करते समय वे एक दूसरे के विपरीत बोलेंगे ।

Solution: एक दूसरे के विपरीत बोलेंगे अर्थात अरूण सच बोलें है तब वरूण झूठ बोलें अथवा अरूण झूठ बोलें तब वरूण सत्य बोलें; अतः वांछित प्रायिकता

Required P = P(A $\cap$ Not V) + (Not A $\cap$ V)

$$= \left(\frac{80}{100} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{20}{100} \times \frac{90}{100}\right) = \frac{8}{100} + \frac{18}{100}$$

$$= \frac{26}{100}$$

Examlpe: दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं । दोनों चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये यदि यह पता है कि उनमें से कम से कम एक तो चित आयेगा ही ।

Solution: यह एक प्रतिबंधित प्रायिकता का प्रश्न है ।

P (Both Heads /at least one Head) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

P (Both heads) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

P (At least one head) = P (A∩Not B) P (Not A∩B) + P (A∩B)

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

P (Both Heads / at least one Head) $=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$

$$=\frac{1}{3}$$

Example: दो पाँसे एक साथ फेंके जाते है । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि दोनों पाँसों का योग 10 है जबकि यह ज्ञात है कि पहला पासा 6 दिखा रहा है ।

Solution: यह एक प्रतिबंधित प्रायिकता का प्रश्न है ।

P(A/B) $=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

P (Total 10/ Frist die show 6) के लिये सर्वप्रथम संयुक्त प्रायिकता P (A⋂B) ज्ञात करेंगे अर्थात पहले पासे 6 के साथ 10 का योग केवल एक ही तरीके से हो सकता है (6, 4)

P (A/B) दो पाँसो मे (6, 4) आने की प्रायिकता $\frac{1}{36}$

P(B) तथा एक पासे में 6 आने की प्रायिकता

(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

अत: P(A/B) $\frac{1}{36}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

16.8 सारांश

बहुधा घटनाएं सरल नहीं होती तब हमें दो या अधिक घटनाएं साथ -साथ घटेंगी की प्रायिकता जानने आवश्यकता होती है । जब हम यह जानना चाहते है कि घटना A घटेगी B घटेगी तब दो परिस्थितियां उत्पन्न होती हैं या तो घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती है अथवा घटनाएं परस्पर अपवर्जी नही होती है । जब घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती है तब सम्बन्धित सरल घटनाओ को जोड़ देते हे लेकिन ऐसी परिस्थिति में जबकि घटनाएं परस्पर अपवर्जी नही होती है तब प्रायिकता ज्ञात करते समय कॉमन तत्व को घटाना आवश्यक होता है अन्यथा कॉमन तत्व की बार-बार गणना होने से प्रायिकता परिकलन सही नही हो पता | ऐसी परिस्थिति में जबकि हम संयुक्त प्रायिकता की गणना करना चाहते है तब दो प्रकार की घटनाओं का सामना करना पड़ता है स्वतंत्र घटनाएं अथवा आश्रित घटनाए । जब घटनाएं स्वतंत्र होती है तब घटना A तथा B की प्रायिकता का परिकलन करते समय घटना A की सीमांत प्रायिकता को घटना B की सीमांत

प्रायिकता से गुणा कर देते है । इसके विपरीत जब घटनाएं आश्रित होती है तब पहली घटना दूसरी घटना को प्रभावित करती है । ताश तथा गेंद निकालने वाली समस्याओं में ऐसा तत्व होता है जबकि पहली बार निकाली गई वस्तु की प्रतिस्थापना नहीं की जाती । आश्रित घटनाओं की प्रायिकता की गणना करते समय प्रथम घटना की सीमांत प्रायिकता से गुणा करके ज्ञात किया जाता है । प्रतिबंधित घटना की प्रायिकता को ज्ञात करते समय संयुक्त प्रायिकता में प्रतिबंध की सीमांत प्रायिकता से भाग देते है । बे के सिद्धान्त के आधार पर पूर्व प्रायिकताओं को संशोधित करके पश्च प्रायिकताए ज्ञात की जाती है । इसे प्रतिलोम प्रायिकता इसलिये कहा जाता है क्योंकि इसके परिणाम के आधार पर कारण की प्रायिकता में संशोधन किया जाता है । ऐसा करना इसलिये आवश्यक होता है क्योंकि नयी सूचना की उपलब्धता हमें प्रायिकता के पुराने अनुमानों को संशोधित करने पर मजबूर कर देती है । प्रतिलोम प्रायिकता का परिकलन आधुनिक काल में प्रबंधकीय निर्णयन में बहुत उपयोगी सिद्ध हो रहा है । वास्तव में वे के सिद्धान्त के आधार पर बनाया गया सूत्र प्रतिबंधित प्रायिकता पर ही आधारित है ।

16.9 स्वपरख प्रश्न (Self Assessment Question)

एक लॉटरी के 40 टिकटों में से, जिन पर 1 से 40 तक के अंक लिखे हुए है, एक टिकट यादृच्छिक रूप से चुना जाता है । उस टिकट के 5 या 6 के गुणित होने की क्या प्रायिकता है ?

$(\frac{13}{40})$

1. A 40 प्रतिशत दशाओं में सत्य बोलता है ओर B 30 प्रतिशत दशाओं में असत्य बोलता है । ज्ञात कीजिये कि किसी तथ्य का वर्णन करते समय वे कितने प्रतिशत समय एक दूसरे के स्वर में स्वर मिलायेंगे ।(28+42=70%)
2. सांख्यिकीय का प्रश्न तीन विद्यार्थियों A, B तथा C को दिया जाता है, जिनके द्वारा उसको हल करने की प्रायिकता क्रमश: 1/2, 1/3 तथा 1/4 है । क्या संभावना है कि प्रश्न हल नहीं हो पायेगा?

   $(\frac{1}{4})$
3. कलश I में 5 लाल तथा 5 काली गेंदें है, कलश II में 4 लाल तथा 8 काली गेंदे है तथा कलश III में 3 लाल तथा 6 काली गेंदें है । दैव आधार पर एक कलश का चयन किया गया तथा एक गेंद निकाली गई । निकाली गई गेंद का रंग काला था । क्या संभावना है कि निकाली गई गेंद कलश III से है ।$(\frac{1}{4})$

16.10 संदर्भ ग्रंथ

K.K.Sharma, Satisitics in Management Studies.
Levin & Rubin , Satistics for Manasgement
शर्मा, जैन, पारीक - व्यावसायिक सांख्यिकी

इकाई-17

प्रायिकता बंटन

इकाई की रूपरेखा
17.1 उद्देश्य
17.2 परिचय
17.3 प्रायिकता बंटनों के प्रकार
17.4 द्विपद आवृत्ति बंटन
17.5 द्विपद बंटन में प्रायिकता का परिकलन
17.8 द्विपद बंटन का माध्य
17.9 प्वायसन बंटन की विशेषताएं
17.8 प्वायसन बंटन
17.9 प्रसामान्य प्रायिकता बंटन
17.10 सारांश
17.11 स्वपरख प्रश्न
17.12 संदर्भ पुस्तकें

17.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि -

- प्रायिकता बंटन की उपयोगिता समझ सकें ।
- द्विपद बंटन में प्रायिकता ज्ञात कर सकें ।
- प्वायसन बंटन के औचित्य को समझ सके ।
- प्रसामान्य बंटन की स्थिति में प्रायिकता ज्ञात कर सके ।

17.2 परिचय (Introduction)

आपने आवृत्ति बंटन के बारे मे पढ़ा है | एक निरपेक्ष आवृत्ति अपने बंटन आवृत्तियां अपने मूल रूप में होती है जबकि एक सापेक्ष आवृजि बंटन की आवृत्तियों का योग प्रतिशत के रूप में 100 अथवा 1 होता है । प्रायिकता बंटन भी एक सापेक्षिक आवृत्ति बंटन है । प्रायिकता बैटन के आधार पर सैद्वातिक आवृत्ति बंटन तैयार किया जा सकता है । सैद्धांतिक आवृत्ति बंटन में अवलोकित आवृत्तियों के स्थान पर प्रत्याशित आवृत्तियां होती हैं । प्रत्याशित आवृत्तियां कुल आवृत्ति को सम्बन्धित प्रायिकता से गुणा करके ज्ञात की जाती है । प्रायिकता बंटनों से अनिश्चितता की स्थिति में निर्णय लेने में सहायता मिलती है । उदाहरण के लिये प्रायिकता बंटन से ऐसे प्रश्नों का उत्तर मिल सकता है जैसे 50 इकाईयों के एक पैक में से दूषित इकाईयों की संख्या क्या होगी अथवा ऐसे परीक्षार्थियो की संख्या क्या होगी जिनके 70 प्रतिशत से अधिक अंक हैं, आदि ।

टिपणी :- प्रायिकता बंटन का विस्तृत अध्ययन आप आगे की कक्षाओ में करेंगे । यहां पर केवल प्रायिकता बंटनों से सामान्य रूप में परिचित कराया जायेगा ।

17.3 प्रायिकता बंटनों के प्रकार (Types of Probability Distribution)

17.3.1 खण्डित प्रायिकता बंटन (Disretres Probability Distributions)

17.3.2 सतत प्रायिकता बंटन (Continuous Probability Distributions)

17.3.1 खण्डित प्रायिकता बंटन - आपके पाठ्यक्रम में निम्नलिखित दो खण्डित प्रायिकता बंटन है-

1. द्विपद आवृत्ति बंटन
2. प्वायसन आवृत्ति बैटन

सतत प्रायिकता बंटन - आपके पाठ्यक्रमानुसार एक मात्र सतत आवृत्ति बंटन प्रसामान्य आवृत्ति बंटन का ही वर्णन इस इकाई में किया गया है ।

17.4 द्विपद आवृत्ति बंटन (dinomial Distribution)

द्विपद आवृति बंटन का श्रेय गणितज्ञ जेकब बर्नोली को जाता है। एक द्विपद आवृति बंटन एक खण्डित आवृति बंटन है, इसका तात्पर्य है कि इसमें सफलता अथवा असफलता की गणना पूर्णाकों 0,1,2 में ही होगी अर्थात ऐसी कोई परिस्थिति संभव नही है जैसे 1.25 बालिकाओं की प्रायिकता अथवा 1.67 ग्राहकों की संभावना आदि।

द्विपद आवृत्ति बंटन वर्नोली प्रक्रिया पर आधारित है । बर्नाली प्रक्रिया को निम्न प्रकार समझा जा सकता

1. प्रत्येक प्रयत्न केवल दो परिस्थितियां उत्पन्न करेगा एक सफलता तथा दूसरी असफलता जैसे चित सफलता तथा पट असफलता, लाल रंग की गेंद अथवा लाल रंग की गेंद नहीं। यहां यह ध्यान देने योग्य है कि गेंद केवल दो ही रंग की नही होती लेकिन बर्नोली प्रक्रिया के अनुसार यदि लाल गेंद सफलता है तो अन्य सभी रंग की गेंद असफलता मानी जायेगी ।
2. प्रत्येक प्रयत्न में सफलता की प्रायिकता (अथवा असफलता की प्रायिकता) बदलती नहीं है। उदाहरण के लिये पासे को कितनी भी बार फैंका जाये, यदि 5,6 आना सफलता हो तब प्रत्येक प्रयत्न में 5,6 की प्रायिकता 2/6=1/3 अपरिवर्तित रहेगी ।
3. प्रत्येक प्रयत्न परस्पर स्वतंत्र है अर्थात पहली बार का परिणाम दूसरी बार के परिणाम को प्रभावित नहीं करता ।
4. किसी प्रयोग में n प्रयत्न होते हैं ।

17.5 द्विपद बंटन में प्रायिकता का परिकलन

किसी द्विपद बंटन में किसी प्रयोग में n प्रयत्नो में से r बार सफलता ज्ञात करने के लिये सूत्र $P(r) = n_{c_r} p^r q^{n-r}$

यहां n का तात्पर्य एक प्रयोग में किये गये प्रयत्नो की संख्या है ।

जबकि r का तात्पर्य कुल सफलता की संख्या है । यहां r एक दैव चर है ।

p का तात्पर्य एक स्वतंत्र प्रयत्न में असफलता की प्रायिकता है ।

जबकि (p+q)=1 अथवा q=(1-p)

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने पर द्विपद बैटन की प्रासिकताओं की गणना निम्न प्रकार की जा सकती है-

R	0	1	2	3	n
P(r)	q^n	$n_{c_1} P^1 q^{n-1}$	$n_{c_1} p^2 q^{n-2}$	$n_{c_1} P^3 q^{n-3}$	p^n

17.6 द्विपद बंटन का माध्य. प्रसरण तथा प्रमाप विचलन

यदि किसी द्विपद बंटन में प्रयत्नों कि संख्या तथा एक प्रत्यय में सफलता की प्रायिकता ज्ञात हो तो न केवल पूरा द्विपद बंटन ज्ञात किया जा सकता है बल्कि उसके माध्य, प्रसरण तथा प्रमाप विचलन भी बिना पूरा आवृति बंटन तैयार किये हुए सीधे ही ज्ञात किये जा सकते हैं ।

द्विपद बंटन का माध्य (Mean of a Binomial Distribution): द्विपद बंटन का माध्य वास्तव में एक प्रत्याशित मूल्य होता है ।

सूत्र - $\mu = np$

यहां μ = माध्य

σ^2 = प्रसरण npq

द्विपद बंटन का प्रमाप विचलन (Standard Deviation of Binomail Distribution)

Example : एक पासा चार बार उछाला जाता है तथा 1 अथवा 6 आना सफलता मानी जाती है। इसके आधार पर द्विपद बंटन तैयार कीजिये ।

Solution: एक पाँसे पर 1 अथवा 6 आने की प्रायिकता $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ होती है । यदि n=4 प्रयत्न किये जाते है तब निम्न में से कोई भी परिस्थिति उत्पन्न हो सकती है या तो चारों बार में एक बार भी सफलता न मिले अर्थात् चारों बार हम चाहकर भी (1 अथवा 6) न ला पाये अर्थात 0 सफलता मिले या 1,2,3 अथवा चारों बार अथवा 06 सफलता मिले ।

द्विपद बंटन

सफलता की संख्या (r)	प्रायिकता P= $n_{c_r} p^r q^{n-r}$	P
0	$4_{c_r} p^0 q^4$	$1 \times 1 \times \left(\frac{2}{4}\right)^4$
1	$4_{c_r} p^1 q^3$	$4 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$
2	$4_{c_r} p^2 q^2$	$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$
3	$4_{c_r} p^3 q^1$	$4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1$

4	$4_{c_r}\ p^4q^0$	$1\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0$

यहां p=$\frac{1}{3}$ तथा q=$\frac{2}{3}$

Example: एक प्रयोग जितनी बार असफल होता है, उससे तिगुनी बार सफल होता है । चार प्रयत्नों में से 3 या अधिक बार सफलता की प्रायिकता ज्ञात करे । इसका माध्य, प्रसार तथा प्रमाण विचलन भी ज्ञात करे । यदि ऐसा प्रयोग 512 बार किया जाये तो एक सैद्धांतिक आवृत्ति बंटन भी तैयार करे ।

Solution: सफलता तथा असफलता का अनुपात 3:1 अर्थात चार प्रयत्नों में से तीन बार सफलता मिल सकती है । अथवा अधिक से अधिक 4 सफलता मिल सकती हे अर्थात n=3 अथवा n=4

P (3, 4)= P(3)+P(4)

= $4c_3p^3q^1+4c_4p^4q^0$

= $4\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1+1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times1$

= $\left(4\times\frac{27}{64}\times\frac{1}{4}\right)+\left(1\times\frac{81}{256}\right)$

= $\frac{108}{256}+\frac{81}{256}+\frac{189}{256}=0.738$

(ii) माध्य $\mu=np=4\times\frac{3}{4}=3$

प्रसरण = $4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

प्रमाप विचलन = $\sqrt{npq=}\sqrt{4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}=0.86$

(iii) सैद्धांतिक आवृत्ति बंटन

r	P	fe=NP
0	$q^n\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}\times512=2$
1	$4c_3\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{12}{256}$	$\frac{12}{256}\times512=24$
2	$4c_3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{54}{256}$	$\frac{54}{256}\times512=108$
3	$4c_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{108}{256}$	$\frac{108}{256}\times512=216$

4	$p^4\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$	$\frac{81}{256}\times 512=162$
	P=512	N=512

यहां fe का तात्पर्य प्रत्याशित आवृति है । इसे सैद्धांतिक आवृति बंटन इसलिये कहा जाता है क्योंकि यह प्रायिकता के आधार पर तैयार किया गया है । वास्तविक आवृत्ति बंटन में अवलोकित आवृत्तियां (fo) उपर्युक्त बंटन में ज्ञात की गई प्रत्याशित आवृतियों (fe) से अलग हो सकती है ।

Example: किसी नमकीन की दुकान पर नमकीन चखाए जाने पर ग्राहक द्वारा नमकीन खरीदने की प्रायिकता 0.8 हो तो ऐसे 5 ग्राहकों को जिन्हें नमकीन चखाया गया है 4 द्वारा नमकीन खरीदने की प्रायिकता ज्ञात करे ।

Solution: यहां किसी ग्राहक द्वारा नमकीन खरीदना एक स्वतंत्र घटना है तथा द्विपद बंटन की अन्य भी पूरी होती हैं ।

n=5 r=4 p=0.8

$P(4)=5c_4p^4q^1$

$=5\times(0.8)^4(0.2)^4$

$=5\times 0.4096\times 0.2$

$=0.4096$

17.6 प्वायसन बंटन (Poisson distribution)

प्वायसन बंटन भी खण्डित आवृति बंटन है। इसका श्रेय फ्रेंच गणितज्ञ (1781-1840) के साइमन डेनिस प्वायसन को जाता है । प्वायसन बटन उस स्थिति में लागू होता है जब किसी घटना के होने की प्रायिकता बहुत कम होती है तथा उस घटना के नहीं घटने की प्रायिकता बहुत अधिक होती है । जबकि प्रयत्नो की संख्या बहुत अधिक होती है । इसे निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है -

$P \longrightarrow 0$

$q \longrightarrow 1$

$n \longrightarrow \infty$

यदि किसी दुकान पर औसतन एक घंटे में 10 ग्राहक आते हैं । यदि इसे प्रति सैकण्ड के हिसाब से देखा जाये तो हम पाते है कि प्रति सेकण्ड ग्राहक के आने की प्रायिकता P=10/3600=0.003 काफी कम होगी तथा किसी एक सैकण्ड में ग्राहक के नहीं आने की प्रायिकता $q=1-\left(\frac{10}{3600}\right)=.997$ लगभग 1 के समीप होगी । यदि यह दुकान कोटा शहर में है तो कोटा की समस्त जनसंख्या n है । यह संख्या इतनी बड़ी है कि इसे व्यावहारिक दृष्टि से अनन्त माना जा सकता है ।

17.8 प्वायसन बंटन की मान्यताएं तथा विशेषताएं

1. प्वायसन बंटन भी एक खण्डित प्रायिकता बंटन हैI
2. प्यायसन बंटन का एकमात्र प्राचलन इसका माध्य m है । इसका माध्य ज्ञात होने पर किसी भी प्वायसन बंटन को पूरी तरह समझा जा सकता है ।
3. प्वायसन बंटन का प्रसरण भी m होता है । इस प्रकार पायसन बंटन के प्रसारण तथा माध्य समान होते है I
4. इसमे घटना के 1,2,3 सफलता की प्रायिकता बहुत कम होती है ।
5. एक अवधि में घटने वाली घटना अन्य अवधि में घटने वाली घटना से स्वतंत्र है ।
6. क्यों कि n असीमित होता है अत: सैद्धांतिक रूप से सफलता की संख्या 0 से लेकर ∞ तक हो सकती है लेकिन व्यावहारिक दृष्टि से अधिकतम प्रायिकता 0,1 अथवा 2 सफलता तक सिमट जाती है तथा 2 से अधिक सफलता की प्रायिकता =1-(0, 1 अथवा 2 तक की प्रायिकता) के आधार पर ज्ञात कर ली जाती है ।
7. यह ऊपर स्पष्ट किया जा चुका है कि एक पॉयसन बंटन का प्राचलन एक मात्र पॉयसन बंटन का माध्य m होता है । इसे ज्ञात करने की दो विधियां है
    (1) यदि ऐतिहासिक समंक उपलब्ध है तब सीधे ही m की गणना की जा सकती है जैसे गत वर्ष 365 दिनों में टेलीफोन कालोनी संख्या 52560 थी तब

    $m = \frac{52560}{365 \times 24 \times 60}$ =0.1 कॉल प्रति मिनट होगी ।

    (2) यदि द्विपद बंटन को पॉयसन बंटन के रूप में हल करना हो तब द्विपद बंटन के औसत के सूत्र के आधार पर पॉयसन बंटन का माध्य ज्ञात करने के लिये m=np सूत्र का प्रयोग करेंगे

उदाहरण के लिये - टीवी. पर किसी एस एम एस से गेम को जीतने की प्रायिकता 0.0003 है तब 100 एस एम एस करने वाले व्यक्ति के लिये m=np=100 $\times$ 0.00003=0.003 होगा ।

8. पायसन बंटन का माध्य. होता है तथा प्रसरण भी m ही होता है जबकि प्रमाप विचलन $\sqrt{m}$ होता है ।

    यदि किसी द्विपद बंटन को पायसन बंटन के रूप में माना जाए तब:

    m=np

    क्योंकि q = 1 के निकट होता है अत: np को एक से गुणा करने पर भी npx1 ही रहेगा ।

इस प्रकार पॉयसन बंटन का माध्य = m

प्रसरण = m

प्रमाप विचलन= $\sqrt{m}$

9. पायसन बंटन में सफलता (r) ज्ञात करने का सूत्र:

$$p(r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

यहां e एक स्थिरांक है जिसका मान 2.71828 होता है । e^{-m} का मूल्य ज्ञात करने के लिये सारणी उपलब्ध है ।

17.9 प्रसामान्य प्रायिकता बंटन (Normal Probability Distribution)

प्रसामान्य प्रायिकता बंटन एक सत्त प्रायिकता बंटन है । अठारहवीं शताब्दी गणितज्ञ कार्ल गॉस का इसमें महत्वपूर्ण योगदान है । अत: प्रसामान्य प्रायिकता बंटन को गौसियन बंटन भी कहा जाता है ।

यदि x एक सतत चर है तब इसे प्रसामान्य रूप से बंटित तब कहा जायेगा जब इसका प्राथमिकता घनत्व फंक्शन निम्नलिखित समीकरण द्वारा अभिव्यक्त किया जाये -

$$p(x) = \left(\frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-0.5} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 ; -\infty < x < \infty$$

यहाँ U = प्रसामान्य बंटन का माध्य है ।

= प्रसामान्य बंटन का माप विचलन है ।

=3.1459

e =2-71828

प्रसामान्य बंटन के उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग कर प्रायिकता निकालना कठिन है; क्योंकि प्रत्येक नये μ तथा σ के लिये उपर्युक्त सूत्र के आधार पर परिकलन करना दुष्कर कार्य है । अत: प्रसामान्य बंटन को मानक प्रसामान्य बंटन में बदल दिया जाता है । एक मानक प्रसामान्य बंटन का चर x के स्थान पर z हो जाता है । किसी भी दिये गये प्रसामान्य चर को x को z में परिवर्तित करना z रूपांतरण कहलाता है । यह रूपांतरण निम्न सूत्र से ही होता है

प्रसामान्य बंटन की विशेषताएं / मान्यताएं -

1. प्रसामान्य बंटन एक घंटीनुमा आकार का वक्र होता है ।
2. इसके बिल्कुल मध्य में माध्य होता है । माध्य, मध्यका तथा बहुलक समान होते है । इसमें केवल एक बहुलक होता है ।
3. वक्र को कागज पर बनाने पर यदि मध्य से मोड़ा जाये तो एक हिस्सा दूसरे हिस्से को पूरी तरह ढक लेता है । इसलिये यह पूर्णरूपेण एक सममित वक्र है । अत: इसमें विषमता शून्य होती है ।
4. इस वक्र की दोनो पूंछे कभी भी आधार रेखा को नहीं छूती है ।
5. यह एक प्रसामान्य शीर्ष वाला वक्र है इसका शीर्ष न तो चपटा है और न ही नुकीला है ।
6. इसका माध्य विचलन= 0.7979
7. प्रसामान्य बंटन का कुल क्षेत्र यदि 1 माना जाये तो आधा माध्य की बाई ओर तथा आधा माध्य की दांई ओर होता है ।
8. यह एक सतत बंटन है अत: किसी एक मूल्य की प्रायिकता ज्ञात नहीं की जा सकती ।

9. प्रायिकता ज्ञात करने के लिये इसके क्षेत्र को मापा जाता है । यह माप सदैव माध्य से की जाती है । माध्य से x मूल्य की दूरी ही इसकी प्रायिकता है । यदि दो बिन्दु माध्य के बांयी ओर तथा दाईं ओर हों तब प्रायिकता ज्ञात करने के लिये पहले माध्य के बांई ओर के बिन्दु से माध्य की दूरी ज्ञात की जायेगी । इसके बाद माध्य से लेकर दांई ओर की दूरी ज्ञात की जायेगी । तत्पश्चात् दोनों को जोड़ा जायेगा ।
10. प्रसामान्य बंटन के दो प्राचल हैं, माध्य μ तथा प्रमाप विचलन σ । यदि माध्य तथा प्रमाप विचलन शांत है तब पूरा प्रसामान्य बंटन स्पष्ट हो जाता है ।
11. प्रत्येक μ तथा σ के समूह के लिये एक नया प्रसामान्य बंटन तैयार किया जा सकता है । इस प्रकार प्रसामान्य बंटन का अनंत परिवार है । इसी कारण दिये गये प्रसामान्य बंटन को मानक प्रसामान्य बंटन में परिवर्तित कर दिया जाता है ।
12. एक मानक प्रसामान्य बंटन का माध्य =0 तथा प्रमाप विचलन =1 होता है । किसी दिये गये प्रसामान्य बंटन के चर x को मानक असामान्य चर z में बदलने के लिये z=-- के सूत्र का प्रयोग करते है । इस सूत्र के परिणामस्वरूप माध्य से दिये गये मूल्य की दूरी को प्रमाप विचलन के पैमाने से मापा जाता है
13. मानक असामान्य चर z की गणना करने के बाद इसके अन्तर्गत आने वाले क्षेत्र को देखने के लिये Area under the standard normal curve की सारणी पुस्तको में उपलब्ध होती है तथा परीक्षा में भी उपलब्ध करा दी जाती है । इस सारणी के आधार पर प्रायिकता ज्ञात करना बहुत सरल हो जाता है ।
14. प्रसामान्य बंटन $\mu \pm 1\sigma$ में 68.27 प्रतिशत, $\mu \pm 2\sigma$ में 95.45 प्रतिशत तथा $\mu \pm 3\sigma$ 99.73 क्षेत्र आ जाता है । व्यावहारिक दृष्टि से 99.73 प्रतिशत को शत प्रतिशत कह सकते है लेकिन सैद्धांतिक दृष्टि से यह कभी शत-प्रतिशत नहीं हो सकता ।

प्रसामान्य बंटन के आधार पर प्रायिकता तथा प्रत्याशित आवृतियां ज्ञात करना

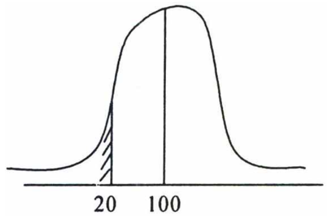
यदि कोई चर प्रसामान्य रूप से वितरित हो तब इसके आधार पर एक निश्चित अंतराल के लिये प्रायिकता तथा प्रत्याशित आवृति की गणना निम्न प्रकार की जा सकती है -

1. सबसे पहले एक प्रसामान्य वक्र का घटीनुमा आकार का एक मुक्त हस्त से चित्र बनाएं इसके मध्य में एक रेखा खींचकर उस पर ग्र तथा उसका मूल्य लिख दे ।
2. इसके पश्चात् उन मूल्यो को लिख दे जिनके लिये प्रायिकता की गणना करनी है ।
3. z की गणना $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ के सूत्र से करे तथा z के मूल्य के आधार पर Area under the normal curve की सारणी से क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।
4. यह क्षेत्रफल ही प्रायिकता है । आवश्यकता पड़ने पर प्रायिकता ज्ञात करने के लिये क्षेत्रफल में 0.5 जोड़ते है अथवा 0.5 में से क्षेत्रफल को घटाते है । यह निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट हो जायेगा । आवृत्ति ज्ञात करने के लिये N से प्रायिकता को गुणा करते हैं ।

Example: यदि एक प्रसामान्य बंटन का माध्य 100 तथा प्रमाप विचलन 40 है तब यादृच्छिक रूप से चुने गये मूल्य के 20 से कम होने की प्रायिकता ज्ञात करे ।

Solution: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$z = \frac{20-100}{40} = -2$$



माध्य के बायी ओर का क्षेत्रफल 0.5 होता है अत: 0.5-0.4772=0.0228

Example: एक विश्वविद्यालय के छात्रों की लम्बाई प्रसामान्य रूप से बंटित है । उनकी माध्य लम्बाई 70" तथा प्रमाप विचलन 10" है । प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि यादच्छिक रूप से चुने गये एक छात्र की लम्बाई

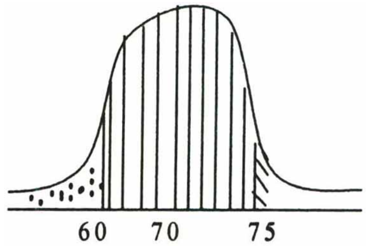
(1) 60" से कम होगी ।

(2) 75" से अधिक होगी ।

(3) 60" से 75" के मध्य होगी ।

Solution:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \; z = \frac{60-70}{10} = -1$$



(1) सारणी में z=-1 का मूल्य 0.3413

लेकिन यह 60-70 के मध्य की प्रायिकता है जबकि 70 से नीचे मूल्य होने की प्रायिकता= 0.5 अत: 60 से कम लम्बाई की प्रायिकता = 0.5 - 0.3413

= 0.1587

(2) 75" से अधिक ऊंचाई होने की प्रायिकता

$$z = \frac{75-70}{10} = 0.5$$

सारणी में z=0.5 का मूल्य 0.1915

अत: 75" से अधिक ऊंचाई की प्रायिकता 0.5-0.1915=0.3035

(3) 60" से 7 5" अधिक ऊंचाई होने की प्रायिकता

0.3413+0.1915=0.5328

17.9 सारांश (Summary)

द्विपद विस्तार बंटन तथा प्वायसन बंटन खण्डित प्रायिकता बंटन है । एक द्विपद बंटन के माध्य तथा प्रसरण क्रमश: np तथा apq होते है । जबकि पायसन बंटन का: माध्य तथा प्रसरण भी m होते है । प्रसामान्य बंटन एक सतत प्रायिकता बंटन है । प्रायिकता बंटन के दो प्राचल क्रमश: माध्य तथा प्रमाप विचलन हैं । प्रसामान्य बंटन की प्रायिकता का परिकलन कठिन है, अत: मानक प्रसामान्य बटन, जिसका माध्य शून्य तथा प्रमाप विचलन एक होता है, के आधार पर प्रसामान्य बंटन की प्रायिकता का परिकलन किया जाता है ।

Example: निम्नलिखित कथन में यदि कोई अविश्वसनीयता है तो बताइये कि एक द्विपद विस्तार बंटन में माध्य 4 तथा उसका प्रमाप विचलन 5 है ।

Solution:

द्विपद विस्तार बंटन= $(q=p)^n$ जहां q=p=1, np=4 $\sqrt{npq}$ =5 or apq=5; 4q=5 or q=$\frac{5}{4}$=1.25>1

अत: कथन अविश्वसनीय है ।

Example : एक द्विपद वितरण में 6 स्वतंत्र परीक्षणो में 3 तथा 4 सफल परीक्षण होने की सम्माविता क्रमश: 0.2457 तथा 0.0819 है । द्विपद बंटन का प्राचल P ज्ञात कीजिये ।

Example:

q=1-p

3 सफलता की प्रायिकता

$^6C_3 p^3 q^{6-3} = .2457$ $\qquad or\ 20p^3q^3 = .2457$

4 सफलता की प्रायिकता

$^6C_4 p^4 q^{6-4} = .0819$ $\qquad or\ 15p^4q^2 = .0819$

$$\frac{15p^4q^2}{20p^3q^3} = \frac{.0819}{.2457}$$

$$\frac{3p}{4q} = \frac{1}{3}$$

$$9p = 4p$$

q=(1-p) $\qquad$ 9p=4(1-p)

9p=4-4p

0p+4p=4 $\qquad$ 13p=4=p=$\frac{4}{13}$

Example : प्वायंसन वितरण में P(x=1)=P(x=2) वितरण का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिये ।

$$P(x) = \frac{e^{-m}.m^r}{r!}$$

$$P(1) = \frac{e^{-m}.m^1}{1}$$

$$P(2) = \frac{e^{-m}.m^2}{2}$$

$$\frac{e^{-m}.m^1}{1} = \frac{e^{-m}.m^2}{2}$$

तिरछा गुणा करने पर 2=$\frac{e^{-m}.m^2}{e^{-m}.m}$

m=2

प्वासन बंटन में माध्य तथा प्रसरण =m होते है, अत: माध्य तथा प्रसरण दोनों का मूल्य 2 है ।

Example: किसी एक उत्पादन प्रक्रिया के दौरान 5 प्रतिशत औजार दूषित होते हैं । 40 औजारों के नमूने में इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि उनमें अधिकतम 2 दूषित औजार हो । (प्रदत्त e^{-2} =0.135)

Solution: The parementer of the Position distribution is given by m=np=40x0.05=2,

The probability of r defects i.e. $P(X=r)=e^{-m}m^{r}$

P(utmost 2 defects)=P(0 defective)+P(1 defective)+ p(2 defectives)

= 0.675

Example:

(a) वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिये जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 2 है ।

(b) माना कि x एक सतत चर है तथा प्रसामान्य वितरण है, जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 2 है । याद च्छिक रूप से x का चयन करने पर इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह 11 से 14 के अंतराल में हो ।

Solution:

(a) यहाँ mean : μ=12=np

σ =2 Variance σ^2=npq=4

$$\frac{x_1-x}{\sigma}=\frac{11-12}{2}$$

$$p=1-q=\frac{2}{3}$$

$$\frac{np}{p}=n=\frac{12}{\frac{2}{3}}=12\times\frac{3}{2}=18$$

अत: द्विपद बंटन $$(p=q)^n=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{18}$$

$$Z_1=\frac{x_1-x}{\sigma}=\frac{11-12}{2}=.5$$

$$Z_2=\frac{x_2-x}{\sigma}=\frac{14-12}{2}=1$$

$P(Z_1$ =-05) =.1915

+P(Z2=1) =.3413

……………………..

0.5328

....

Example:

एक परीक्षा में फेल होने वाले कुल विद्यार्थियों का प्रतिशत 30 है । उस परीक्षा में इस बात की क्या प्रायिकता है कि 1 समूह के 6 विद्यार्थियो में से कम से कम 4 विद्यार्थी पास हों ।

Probability of a student failing in examination	0.30
Probability of a student passing the examination	1-.30=0.70

Probability that out of 6 candidates at least 4 passed the examination

$$^6C_4(0.7)^4(0.3)^{6-4}+^6C_5(0.7)^5(0.3)^{6-5}+^6C_6(0.7)^6(0.3)^{6-6}$$

(15×.2401×.09)+(6×1.6807×.3)+1×.117649×1

=.324135+.302526+.117649

=0.74431

Solution:

Given m=2

(i) No costomer appears

$$P(r)\frac{e^{-m}m^r}{r}$$

$$P(O)e^{-m}$$

$$P(O)e^{-2}=0.1353$$

(ii) Three or more customers appears

P(x>3)=1-[P(0)+P(1)+P(2)]

$$1-\left[e^{-m}+e^{-m}+e^{-m}\frac{-m^2}{2}\right]$$

$$=1-\left[.1353+.1353\times 2+.1353\times\frac{2^2}{2}\right]$$

1-[.1353+.2706+.2706]=0.3235

(अ) यदि द्विपद बंटन का माध्य 48 तथा प्रमाप विचलन 4 हो तो बंटन निकालिये ।

(ब) एक परीक्षा में प्राप्तांकों का बंटन प्रसामान्य है जिसका माध्य 45 तथा प्रमाप विचलन 10 है । यदि परीक्षा में 1000 विद्यार्थी बैठ हो तो (1) कितनों के अंक 40 से कम होंगे तथा (2) कितनो के 60 से अधिक?

Solution:

(a) u=np $\qquad\qquad$ $\sigma=\sqrt{npq}$

48=np $\qquad\qquad$ 4=$\sqrt{npq}$ or 4^2 =npq

np=48 npq=16

$$q=\frac{npq}{np}=\frac{16}{48}=\frac{1}{3}$$

$$p=1-q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$n=\frac{np}{p}=\frac{48}{2/3}=48\times\frac{3}{2}=72$$

अत: द्विपद बंटन= $(p+q)^n$ या $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^n$

(i) $Z=\frac{x-u}{\sigma}=Z=\frac{40-45}{10}=0.5$

45 से कम क्षेत्र	=	0.5000
घटाएँ 40 से 45 का क्षेत्र		0.1915
		-----------
40 से कम अंको की प्रायिकता		0.3085
		-----------

40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियो की संख्या

N.P= 1000×.3085≈308 विद्यार्थी (सम संख्या उत्पादन के आधार पर)

$$Z=\frac{60-45}{10}=1.5$$

45 से अधिक क्षेत्र	0.5000
घटाएं 45 से 60 का क्षेत्र P(Z=1.5)	0.4332
	-----------
60 से अधिक अंको की प्रायिंकता	0.0668
	------------

60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियो की संख्या

N.P.= 1000x0.668≈67

17.10 स्वपरख प्रश्न

1. द्विपद बंटन की प्रमुख विशेषताओं का उल्लेख करे।
2. सामान्य बंटन की प्रमुख विशेषताओं का उल्लेख करे ।
3. प्वायसन बंटन के माध्य व प्रसरण बताइये ।
4. एक प्वायसन बंटन में ठीक 7 प्रतिशत वस्तुए 35 के नीचे तथा 89 प्रतिशत वस्तुए 63 के नीचे है । बंटन का माध्य तथा प्रमाप विचलन क्या होगा?

(Ans. (X=50.3 σ =10.33)

5. एक द्विपद बंटन में माध्य और प्रसरण क्रमश: 4 व 3 है, इस वितरण मे शून्य मूल्य नही आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये ।

(Ans.$(1-(3/4)^{16})$

6. वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिये जिसका माध्य 9 एवं प्रसरण 2.25 है ।

(Ans.n=12,$P=\frac{3}{4}$)

7. वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिये जिसका माध्य 12 एंव प्रमाप विचलन 3 है ।

(Ans. n=12, $p=\frac{1}{4}$)

8. एक मशीन के द्वारा निर्मित बोल्ट्स में 20 प्रतिशत बोल्ट्स दूषित पाये गये । 5 यादृच्छिक रूप से चुने गये वोल्ट्स के लिये प्रायिकता वितरण ज्ञात कीजिये ।

Ans. $f(x) = {}^5Cx\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$,x=0,1,2,3,4,5)

9. एक समूह में दोषपूर्ण वस्तुओं का अनुपात 4 प्रतिशत है । 10 वस्तुओं के नमूनो में 2 से अधिक वस्तु दूषित न होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये । यह ज्ञात है कि c^{-4} = 0.6703

Ans.(99.2%)

10. यह ज्ञात है कि एक कम्पनी द्वारा निर्मित बिजली के बलों में से 3 प्रतिशत दोषपूर्ण होते है । प्वायसन बंटन का प्रयोग करके यह ज्ञात कीजिये कि 100 बलों के एक प्रतिदर्श में

(अ) दोषपूर्ण बल नही होगा । (ब) एक दोषपूर्ण होगा । Ans. ($P_{(0)}$=0.5 $P_{(1)}$=015)

11. बम्बई की सड्कों पर 1000 बल लगाये जाते है जिनका माध्य जीवन 120 दिन है । उनका जीवन प्रसामान्य बंटन के अनुरूप है जिसका प्रसरण 400 दिन है (अ) कितने बल 90 से कम निदो में समाप्त हो जायेंगे? (ब) यदि सभी बलों को एक साथ प्रतिस्थापित करना हो तो प्रतिस्थापनों के बीच कितना समयान्तर दिया जाये जिससे प्रतिस्थापन से पहले 10 प्रतिशत से अधिक समाप्त न हो ।

12. एक प्रसामान्य बंटन में ठीक 7 प्रतिशत वस्तुएं 35 के नीचे तथा 89 प्रतिशत वस्तुएं 63 के नीचे है । बंटन का माध्य तथा प्रमाप विचलन क्या होगा?

13. सिपाहियों की औसत ऊंचाई 68.22” है ओर प्रसरण 10.8” है । 1000 सिपाहियों के दल में कितने सिपाहियों को आप 72" से अधिक लम्बा होने की प्रत्याशा करते है?

14. एक प्रसामान्य बंटन में 10.03 प्रतिशत मद कि.ग्रा. भार से कम तथा 39.97 प्रतिशत मद 70 किग्रा. भार से कम है । इस बंटन का माध्य तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिये।

Ans.(Mean=47.5 and σ -=17.58)

BC-02

ISBN - 13/978-81-8496-186-7